

Diskussionsbeiträge
des Fachbereichs Wirtschaftswissenschaft
der Freien Universität Berlin

Nr. 2005/24
BETRIEBSWIRTSCHAFTLICHE REIHE

**Analytische und numerische Untersuchungen zum
Peitscheneffekt im Supply Chain Management**

Hans-Joachim Lenz und Driss Essebbabi



ISBN 3-938369-23-X

Analytische und Numerische Untersuchungen zum Peitscheneffekt im Supply Chain Management

Hans-J. Lenz und Driss Essebbabi

Frei Universität Berlin Institut für Wirtschaft Informatik

Email: hjlenz@wiwiss.fu-berlin.de, driss_essebbabi@web.de

November 2005

Abstract

Das Modell von Warburton zur analytischen Untersuchung des Peitscheneffekts für den Fall eines konstanten Nachfrageverlaufs führt zu einer verzögerten Differentialgleichung, wobei die Einflussgrößen des Peitscheneffekts die Wiederbeschaffungsverzögerungszeit und die Lagerperiode sind.

Die Wirkungen anderer Nachfrageprozesse auf die Lösung der verzögerten Differentialgleichung und damit des Peitscheneffektes sind zu untersuchen. Dementsprechend ist zu zeigen, dass der Nachfrageprozess des Typs „Autoregressiver Prozess erster Ordnung“ ($AR(1)$) die Lösung der zugehörigen Differentialgleichung bestimmt und der Peitscheneffekt berechnet werden kann.

Keyword: Peitscheneffekt, Autoregressiver Prozess erster Ordnung, Bestellpolitik, verzögerten Differentialgleichung, Supply Chain Management.

1 Allgemeine Darstellungen

Die wissenschaftliche Untersuchung der SCM stützt sich, was die mathematische Seite anbelangt, stark auf die Erkenntnisse der System-, Komplexität- sowie der Chaostheorie. Im Grunde wird bei den aktuellen Entwicklungen der SCM auf die Erfahrungen aus der *System-Dynamics*-Forschung¹ aufgebaut. Richtungsweisend waren die Arbeiten von Jay. W. Forrester (MIT) Anfang der 50er Jahre zur Untersuchung der zyklischen Produktionsschwankungen.

Unsichtbare Unternehmen und E-Business sind Begriffe, die aus dem aktuellen wirtschaftlichen Denken kaum weg zu denken sind. Die Schnittmenge zwischen diesen Konzeptionen wird an sich als mächtig gesehen. Es fehlt jedoch bisher an einer umfassenden Untersuchung. Durch einen immer schärfer werdenden Wettbewerbsdruck der globalen Märkte sind Unternehmen gezwungen, ihre Prozesse konsequenter als bisher zu optimieren. Jedoch haben die führenden Unternehmen erkannt, dass eine durchgängige Wertschöpfungskette mit einer engen Kooperation von Unternehmen ein Erfolg versprechender Weg zur Bewältigung gegensätzlicher Anforderungen der Wertschöpfungsglieder ist. Die mangelnde Informationsqualität über die Produktionskapazitäten, die Lagerreichweiten und die Wiederbeschaffungszeiten aller Wertschöpfungsteilnehmern stehen hinter der Forderung nach Transparenz von Wertschöpfungsketten.

Der Peitscheneffekt ist ein wichtiger Indikator der Erfolgsmessung in die Wertschöpfungskette (WK), deshalb gibt es viele Versuche, den Peitscheneffekt zu messen. Er bezeichnet dennoch das Phänomen, das auch bei konstanter Nachfrage der Endkunden die Bestellmengen entlang der Logistikkette, angefangen bei den Einzelhändlern bis hin zu den Zulieferern, zunehmend variiert.² Eine reine Theorie für eine rationale und systematische Erklärung des Peitscheneffekts gibt es bislang aber noch nicht. Hansman et al. (2005, S. 12) führen aus, dass virtuelle Unternehmen eine relativ neue Kooperationsform darstellen und ihr Erfolg und vor allem ihre Determinanten noch wenig erforscht sind. Dennoch ist für das Verständnis des Peitscheneffektes die Verdeutlichung der Ursachen für die Schwankung der Bestellmengen erforderlich. Schon die Variabilität in den Bestellungen des Einzelhändlers ist viel größer als jene in der Konsumentennachfrage (s. Abb. 1.1). Lee et al. (1997a, S. 548) identifiziert als ausschlaggebende Ursachen:

- Ungenauigkeit bei der Vorhersage der Nachfrage

² Das wurde auch bestätigt in der Untersuchung von R. D. H. Warburton.

- Auftragsvergabe in großen Losen
- Preisänderung
- Engpässe in der Beschaffung
- Verzögerung in den Informationsflüssen

Für Fiala (2005, S. 420) ist die Informationsasymmetrie die wichtigste Ursache des Peitscheneffektes. Darüber hinaus sind diese Faktoren in ihrem Auftreten unabhängig voneinander, verstärken sich aber gegenseitig, entwickeln eine eigene Dynamik und führen zur Erhöhung der Nachfragemengen (Buxmann 2003, S. 2). Chen et al. gaben im Jahr 1998 an, dass, auch wenn alle Informationen der Wertschöpfungsglieder geteilt werden, es immer noch eine Vergrößerung der Bestellrate geben würde, die sich allerdings mit weniger Amplituden auswirken würde (Chatfield et al. 2004, S. 342).³

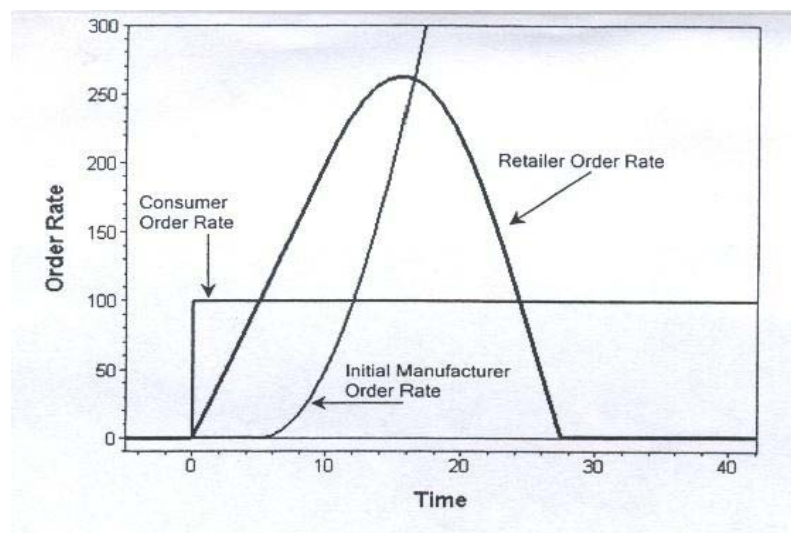


Abb. 1.1: Der BWE: Vergrößerung der Bestellrate vom Endkunden über den Einzelhändler bis zum Hersteller. Die Kurven stellen die Exakten analytischen Lösungen der Supply Chain Gleichungen dar (Quelle: Warburton 2004, S. 154, mod.).

Erläuterung: Order Rate: Bestellrate; Consumer Order Rate: Konsumenten Nachfragerate; Retailer Order Rate: Einzelhändler Bestellrate; Initial Manufacturer Order Rate: Initiale Bestellrate der Hersteller.

Der Peitscheneffekt ist demzufolge in jeder Wertschöpfungskette offensichtlich (Witthaut, S. 1). Außerdem ist laut Chatfield et al. (2004, S. 340) in der oberen Abbildung eine gute Erklärung der Erweiterung der Bestellrate vom Endkunden, über den Einzelhändler bis hin zum Hersteller dargestellt. Die Bestellmengen der Endkunden sind relativ stabil und

³ Lee, So und Tang (2000) und Dejonckheere et al. (2004) kamen auch zu den gleichen Ergebnissen. (Chatfield et al. 2004, S. 342.)

gleichmäßig, jedoch werden diese immer unregelmäßiger von dem Einzelhändler bis zu dem Hersteller.

Vor Beginn dieser Untersuchung ist es erforderlich, sich eine Prognose der Nachfragezeitreihe zu verschaffen, weil sie die Grundlage für Entscheidungen im Bestandsmanagement die Nachfrageprognose ist (Thonemann 2005, S. 28). Der folgende Unterabschnitt beschäftigt sich dementsprechend mit dem Nachfrageprozess vom Typ „Autoregressiver Prozess erster Ordnung.“

1.1 Der Nachfrageprozess vom Typ „Autoregressiver Prozess erster Ordnung“

Zur Ermittlung der Nachfrageprognose ist eine Reihe unterschiedlicher Verfahren entwickelt worden (Schneeweiss 1999, S. 145). Die Endkunden werden häufiger durch einen stochastischen, saisonabhängigen Nachfrageprozess charakterisiert.

Die Nachfragerate ist dargestellt als ein $AR(1)$ (Kahn 1987, S. 668):

$$D(t) = \rho D(t-1) + d + u(t). \quad (Gl.1.1)$$

$AR(1)$: Kurzschreibweise eines autoregressiven Prozesses, der auch als Markovprozess⁴ erster Ordnung bezeichnet wird.

$D(t)$: Die geschätzte Nachfragerate des Zeitpunktes t .

ρ : Ist ein Autokorrelationsfaktor mit $|\rho| < 1$.

$u(t)$: Zufälliger Schock, ist unabhängig und identisch verteilt ($u(t) \sim N(0, \sigma^2)$).

d : Neben dem zufälligen Schocks verändert auch eine strukturelle Komponente den aktuellen Wert. Das ist ein eisener Bestand ($d > 0$ und konstant).

t : Kontinuierliche Planungsperiode; t ist eine reelle positive Zahl.

Ein $AR(1)$ lässt sich als stochastische lineare Differenzgleichung erster Ordnung beschreiben. In diese Prognosemodelle wird die Zufallsvariable u der Verteilungsfunktion als zeitlich nicht konstant, mit dem Mittelwert Null und mit vorgegebener Varianz⁵ (σ^2)

⁴ Die Markov-Prozesse haben die Eigenschaft, dass die Zukunft des Prozesses zwar von seiner Gegenwart, jedoch nicht von seiner Vergangenheit abhängt. Sie sind ein nach dem russischen Mathematiker Markov A. A. (1856-1922) benanntes und auf Wahrscheinlichkeitsgesetzen basierendes Verfahren.

⁵ Die Varianz, d. h. die quadratische Abweichung zwischen verschiedenen Periodennachfrageniveaus, ist konstant über die Zeit.

angenommen. $u(t)$ ist ein weißer Rausch-Prozess (*white noise*)⁶ und die Wahrscheinlichkeit einer negativen Nachfragerate ist unplausibel wenn $\sigma \ll d$ (Lee et al. 1997, S. 628).

Als kompakte Form lässt sich (Gl.1.1) schreiben als:

$$D(t) = \rho^t D(0) + d \frac{1 - \rho^t}{1 - \rho} + \sum_{j=0}^{t-1} \rho^j u(t-j). \text{ für } \rho \neq 0 \quad (\text{Gl.1.2a})$$

$$D(t) = d + u(t) \quad \text{für } \rho = 0. \quad (\text{Gl.1.2b})$$

Auf Grund der Darstellung in (Gl.1.2a) und (Gl.1.2b) könnte der Erwartungswert berechnet werden:

$$E[D(t)] = \frac{d}{1 - \rho} \quad \text{für } \rho \neq 0 \quad (\text{Gl.1.3a})$$

und
$$E[D(t)] = d \quad \text{für } \rho = 0, \quad (\text{Gl.1.3b})$$

der Erwartungswert der Nachfrage ist somit strikt positiv und konstant.

Außerdem lassen sich die zeitlichen Abhängigkeiten im Allgemein durch die Autokorrelationsfolge einer Zeitreihe entdecken, da die Autokorrelation grundsätzlich wichtige Informationen über die Zeitreihe liefert.

Die Autokorrelationsfunktion $\varphi(k)$ ist definiert:

$$\varphi(k) = \rho^k \quad (\text{Gl.1.4})$$

k : Zeitabstand zwischen zwei Werten einer Beobachtungsreihe.⁷ ($\forall k = 1, 2, \dots$)

Diese Annahme der Nachfrageprozesse ist ein dynamisches Modell, das Beziehungen zwischen der Nachfrage $D(t)$ und der vorbestimmten Variablen $D(t-1)$ und $u(t)$ gibt.

Darüber hinaus muss zunächst vor Beginn dieser Untersuchung der Begriff der Lambert W Funktion erklärt werden.

1.2 Beschreibung von Schwingungen und die Lambert W Funktion

Das Zahlensystem der gewöhnlichen Algebra mit den so genannten „reellen Zahlen“ reicht nicht aus, um oszillatorische Bewegungen von Variablen zu beschreiben (Allen 1971, S. 110). Insbesondere liefert es, von speziellen Fällen wie der verzögerten differentialen Gleichung abgesehen- auch keine Lösungen für Differenzen oder Differentialgleichungen. Das Zahlensystem muss daher erweitert werden, um auch die so genannten komplexen Zahlen mit

⁶ $u(t)$ kann von jeder kontinuierlichen Verteilung, z.B. normal, log-normal, Gammas oder exponentiell gezeichnet werden.

⁷ D. h. Lag (auf English) und ist eine konstante Zeitdifferenz. Die Beziehungen eines dynamischen Modells müssen grundsätzlich *time Lags* (Zeitverschiebung) enthalten. Die zeitliche Entwicklung der Variablen im Modell hängt nicht nur von der Tatsache ab, dass diese *Lags* existieren, sondern auch noch von der spezifischer Form dieser *Lags* (Allen 1971, S.28).

einbeziehen zu können. Darüber hinaus verwendet die ökonomische Theorie zur Beschreibung von Schwingungen und oszillatorischen Bewegungen die Algebra komplexer Zahlen. Oft geschieht dies, in Fällen, in denen das Interesse sich auf Ergebnisse reeller Zahlen beschränkt. Denn bei Operationen mit reellen Zahlen wird der Operationsbereich dadurch erweitert, dass die Dimension der komplexen Zahlen zusätzlich zur Verfügung steht (Allen 1971, S 132).

Die bekanntesten Arten von Schwingungen sind diejenigen, die sich mit Hilfe der trigonometrischen Funktion darstellen lassen. Die hier vorliegende Arbeit beschäftigt sich mit der Untersuchung von Fluktuationen der Lagerbestände. Die Beschreibung von Schwingungen des Lagerbestandes wird mit Hilfe der Lambert⁸-W-Funktion⁹ dargestellt.

Allerdings handelt es sich in unserer einfachen linearen Darstellung des Supply Chain Managements um eine vierstufige Kette mit zwei Schnittstelle¹⁰:

- 1 Konsument: Der Kunde, d. h. der Endabnehmer der Ware.
- 2 Einzelhändler: Ist der Händler zwischen dem Konsumenten und Produzenten
- 3 Hersteller: Produzent der Ware.
- 4 Lieferant: Hersteller von Produkten, die der Hersteller für die Erzeugung der Ware benötigt.

Bei zwei Teilnehmern (Einzelhändler und Hersteller) werden einzelwirtschaftliche Entscheidungskalküle, die Bestellungen- und Lagerhaltungspolitik betreffend diskutiert.

2 Analytische Untersuchungen zum Peitscheneffekt

Stochastisches Verhalten kann im Allgemeinen entweder durch die Störung des Systems verursacht werden oder es kann in dem System selbst enthalten sein (Mielke 2005, S. 3). Stochastische Einflüsse ergeben sich im Lagerhaltungssystem insbesondere durch Störungen in innerbetrieblichen Produktions- bzw. Lagerprozessen, im Transportsablauf, Verzögerungen in der Informationsweitergabe oder auch durch Nachfrageunsicherheit. Allerdings sind im Allgemeinen stochastische Größen in einem Modell unerwünscht.

Vorerst wird ein Modell der Einzelhändler dargestellt. Dafür werden für die Bestell- und Lagerhaltungspolitik bestimmte Annahmen getroffen.

⁸ J. H. Lambert (1728-1777) deutsche Mathematiker, Physiker, Astronom und Philosoph.

⁹ Siehe mathematischer Anhang A

¹⁰ In der vorliegende Arbeit wird nur eine zwei Schnittstelle Supply Chain: Einzelhändler-Hersteller und Hersteller-Lieferant, wobei die erste Schnittstelle detailliert untersucht wird.

2.1 Einzelhändler-Wertschöpfungskette-Modell

Der Prozess aus setzt sich aus einem zeitabhängigen deterministischen Prozess und einem rein nicht deterministischen Prozess zusammen. Da die zeitliche Entwicklung dieser Größen nicht eindeutig ist, nennt man das System stochastisch. Der Einzelhändler konzentriert sich auf die Befriedigung der Konsumenten-Forderung. Dieser stochastische Ansatz berücksichtigt die täglichen Schwankungen des Nachfrageprozesses.

Die Aufgabe der Modellierung liegt im Auffinden von Abhängigkeiten innerhalb eines oder zwischen mehreren Datensätzen. Z. B. wird mit Hilfe des Autoregressiven Prozess erster Ordnung für die Nachfrage versucht, eine optimale Bestellmenge der Einzelhändler zu erzielen.

Basierend auf Forrester lautet die Bestellpolitik der Einzelhändler:¹¹

$$O^E(t) = \text{Arg max}(0, \frac{I_D^E - I^E(t)}{T^E}) \quad (\text{Gl.2.1})$$

$I^E(t)$: Der Lagerbestand¹² der Einzelhändler in der Zeit t .

$I_D^E(t)$: Der erwünschte Lagerbestand der Einzelhändler in der Zeit t ; d. h. der

Zielbestand, der angibt wie viel am Anfang der Periode erwünscht wird. Wenn die Nachfrage geschätzt ist, wird der erwünschte Lagerbestand festgelegt:

$$I_D^E(t) = I_D^E = \text{Konstant.}$$

$T^E(t)$: Der Bestellzyklus oder die Lagerperiode der Einzelhändler, d. h. die Zeit zwischen zwei Bestellungen.¹³ Dazu wird die Lagerperiode in dem Zeitpunkt t festgelegt:

$$T^E(t) = T^E.$$

Die o. g. Bestellpolitik ist angemessener als die Bestellpolitik anderer Lagerhaltungsmodelle, wie z. B. die (s, Q) -Politik.¹⁴ Mit der Annahme, dass die Bestellrate auf Null gehen sollte, wenn der erwünschte Lagerbestand erreicht ist, nähert sich diese Bestellpolitik tatsächlich mehr der Realität an. Außerdem dürfen Bestellungen nicht negativ sein.

¹¹ Mit dieser Ermittlung der optimalen Bestellmenge sind allerdings die vorbereitenden Arbeiten zur Optimierung der Beschaffung nicht ganz beendet. Vorerst müsste die optimale Lagerperiode ermittelt werden.

¹² Der Lagerbestand ist der tatsächliche Lagerbestand ohne Berücksichtigung der Bestände, die sich in Pepline befinden (oder work in process (WIP)).

¹³ Im Bericht zu den Simulations- und Kontroll-Theorien von Disney, Naim und Towill (2000) abstrahiert die Praxis, wenn die Periodenlänge gleich eins ($T = 1$) eingesetzt wird, um das Defizit in einer Zeitperiode abzudecken (Warburton 2004, S. 151). Allerdings ist zu vermuten, dass in der betrieblichen Praxis die Verwendung einheitlicher Bestellzyklen für mehrere Produkte die häufig sinnvollere Aggregationsform darstellt (Tempelmeier 2003, S.25).

¹⁴ Mit den (s, Q) Politik ist gemeint, dass, wenn der Lagerbestand den Bestellpunkt s unterschritten hat, eine Menge Q nachbestellt wird.

2.1.1 Lösung der Supply Chain Gleichung

Der Lagerbilanzgleichung der Einzelhändler ist:

$$\frac{dI^E(t)}{dt} = R^E(t) - E[D(t)]. \quad (Gl.2.3)$$

$R^E(t)$: Die Lagerauffüllrate der Einzelhändler in der Zeit t .

Weil sowohl die Einzelhandels- als auch die Herstellungsquantitäten in den Gleichungen vorkommen, werden die Superskripts, E und H , eingeschlossen, um die Quantitäten der Hersteller (H) und die der Einzelhändler (E) zu unterscheiden. Wegen der Herstellungs- und der Transportzeit gibt es eine Verzögerung beim Wiederauffüllen. Der Empfang der Einzelhändler vom Hersteller ist die Anforderung des Einzelhändlers, die gerade bis zur Wiederbeschaffungszeit (τ^E) verzögert wird. Tatsächlich tritt für jede Bestellung eine determinierte Verzögerung von der Bestellung bis zum Empfang der Güter durch den Einzelhändler ein. Wenn die Nachfrage für eine besondere Marke, Schachtelgröße oder Mischungen ohne Vorwarnung ansteigt, sind viele Organisationen, auch wenn sie Waren im Lager vorrätig haben, unfähig zu reagieren (Lee 2004, S. 104).

Die Lagerauffüllrate in der Zeit t entspricht der Bestellrate in der Zeit $t - \tau^E$:

$$R^E(t) = O^E(t - \tau^E) = \frac{I_D^E - I^E(t - \tau^E)}{T^E}. \quad (Gl.2.4)$$

τ^E : Wiederbeschaffungszeit der Einzelhändler, die entweder Liefer- und oder Produktionsverzögerungszeit ist.

Die Bestellpolitik (Gl.2.4) wird in (Gl.2.3) substituiert wird, dann ist die Lagerbilanzgleichung:

$$\frac{dI^E(t)}{dt} + \frac{I^E(t - \tau)}{T^E} = \frac{I_D^E}{T^E} - E[D(t)]. \quad (Gl.2.5)$$

(Gl.2.5) kann wie folgt beschrieben werden:

$$\begin{aligned} \frac{dI^E(t)}{dt} &= f(t, I^E(t), I^E(t - \tau^E), E[D(t)]) \\ f(t) &= \frac{I_D^E}{T^E} - \frac{I^E(t - \tau^E)}{T^E} - E[D(t)], \end{aligned} \quad (Gl.2.6)$$

wobei τ^E eine positive Konstante ist und f als in einer geeigneten offenen Funktion vorausgesetzt wird. Dies ist eine lineare, inhomogene, stochastische und verzögerte Differentialgleichung erster Ordnung. Sie beschreibt den Lagerbestand, in dem der Zustand

des Systems nicht nur von gewissen Größen zur augenblicklichen Zeit t abhängt, sondern auch noch von Einflüssen, die zum Zeitpunkt $t - \tau^E$ vorherrschen.

Wegen der Zeitverzögerung in dem Lagerbestandsaufbau gibt es zwei Zeitintervalle:

a)- $t \leq \tau^E$:

Vor der Zeit τ^E ist kein Artikel vom Einzelhändler zu bekommen.

Daraus gilt aus (Gl.2.4):

$$R^E(t) = 0,$$

denn aus (Gl.2.5) ergibt:

$$\frac{dI^E(t)}{dt} = -E[D(t)] \Rightarrow dI^E = -E[D(t)]dt.$$

- Für $\rho = 0$ ist die Erwartung der Nachfrage aus (Gl.1.3b): $E[D(t)] = d$; daraus folgt als Lösung der Supply-Chain-Gleichung, die gleiche Lösung wie diejenige, die von Warburton gelöst wurde, d. h. im Fall eines konstanten Nachfrageverlaufs.
- Für $\rho \neq 0 \Rightarrow E[D(t)] = \frac{d}{1-\rho}$, konstant über die Zeit.

Daraus folgt, dass die Untersuchung dieser vorliegenden Arbeit auf den Fall $\rho \neq 0$ beschränkt wird.

Einsetzen (Gl.1.3) in (Gl.2.5) $\Rightarrow \frac{dI^E(t)}{dt} + \frac{I^E(t-\tau)}{T^E} = \frac{I_D^E}{T^E} - \frac{d}{1-\rho}.$

Somit gilt wegen der Linearität des Erwartungswertes:

$$\Rightarrow I^E - I_0^E = -\int_0^t \frac{d}{1-\rho} dx,$$

daraus folgt die **Lösung der Supply-chain-Gleichung** für $t \leq \tau^E$:

$$I^E(t) = I_0^E - \frac{d}{1-\rho}t \quad (|\rho| \leq 1). \quad (Gl.2.7)$$

Die Entwicklung des Lagerbestandes der Einzelhändler ist für $t \leq \tau^E$ linear.

b)- $t \geq \tau^E$: Wir fangen mit der homogenen Lösung an.

- Die homogene Gleichung ist:

$$\frac{dI^E(t)}{dt} + \frac{I^E(t - \tau^E)}{T^E} = 0. \quad (Gl.2.8)$$

Die Komplexität dieser Gleichung ist mit der Wiederauffüllungsverzögerungszeit, τ^E verbunden. Diese Gleichung wird Supply-Chain-Gleichung genannt (Warburton 2004, S. 158) und ist Teil der VDG (Bellman 1963, S. 42f.)

Als Lösung (Corless 1996, S. 456):

$$I^E(t) = I^h(t) = B \exp(st). \quad (Gl.2.9)$$

B und s sind komplexe Zahlen.

Daraus folgt:

$$I^E(t - \tau^E) = B \exp(s(t - \tau^E)) \Rightarrow I^E(t - \tau^E) = B \exp(st - s\tau^E), \quad (Gl.2.10)$$

Einsetzen der Gleichungen (Gl.2.9) und (Gl.2.10) in (Gl.2.8) ergibt:

$$Bs \exp(st) + \frac{B}{T^E} \exp(st - s\tau^E) = 0 \Rightarrow B \exp(st) \left(s + \frac{\exp(-s\tau^E)}{T^E} \right) = 0 \quad (Gl.2.11)$$

$$\Leftrightarrow B \exp(st) = 0 \quad (Gl.2.11a)$$

und /oder

$$s + \frac{\exp(-s\tau^E)}{T^E} = 0 \quad (Gl.2.11b)$$

Aus (Gl.2.11a) gilt:

$$B \exp(st) = 0 \Leftrightarrow B = 0, \text{ weil } \exp(st) \neq 0 \quad \forall s \in \mathbb{C}.$$

Aus (Gl.2.11b) gilt:

$$s + \frac{\exp(-s\tau^E)}{T^E} = 0 \Rightarrow s\tau^E \exp(s\tau^E) = -\frac{\tau^E}{T^E}. \quad (Gl.2.12)$$

Die Gleichung (Gl.2.12) kann gelöst werden mit Hilfe der Lambert W Funktion, die die Voraussetzungen $W(z) \exp[W(z)] = z$ erfüllt (Corless et al. 1996, S. 330).

$$\Rightarrow W(z) \exp[W(z)] = z \Rightarrow s = \frac{W}{T^E}. \quad (Gl.2.13)$$

Es wird angenommen:

$$W(z) = W; z = -\frac{\tau^E}{T^E}.$$

Die Substitution von (Gl.2.13) in (Gl.2.9) ergibt **die homogene Lösung**:

$$I = B \exp\left(\frac{Wt}{T^E}\right) \quad B = b + i\beta$$

$$W = W(0, \frac{-\tau^E}{T^E}). \quad W = \phi + i\Sigma \quad (Gl.2.14)$$

Die allgemeine Lösung der VDG ist demnach in der Form:

$$I^E(t) = B \exp(\frac{Wt}{\tau^E}) + K_0; \quad K_0 = \text{Die Konstante} \quad (Gl.2.15)$$

Ableiten (Gl.2.15) nach t ergibt:

$$\frac{dI^E(t)}{dt} = B \frac{W}{\tau^E} \exp(\frac{Wt}{\tau^E}), \quad (Gl.2.16)$$

und es gilt auch

$$I^E(t - \tau^E) = B \exp(\frac{W(t - \tau^E)}{\tau^E}) + K_0. \quad (Gl.2.17)$$

Einsetzen (Gl.2.16) und (Gl.2.17) in (Gl.2.15) ergibt:

$$B \frac{W}{\tau^E} \exp(\frac{Wt}{\tau^E}) + \frac{B}{T^E} \exp(\frac{W(t - \tau^E)}{\tau^E}) + \frac{K_0}{T^E} = \frac{I_D^E}{T^E} - \frac{d}{1 - \rho}. \quad (Gl.2.18)$$

Daraus ergibt:

$$\frac{K_0}{T^E} = \frac{I_D^E}{T^E} - \frac{d}{1 - \rho} \Rightarrow K_0 = I_D^E - T^E \frac{d}{1 - \rho}. \quad (Gl.2.19)$$

Die allgemeine Lösung der VDG ist in der Form:

$$I^E(t) = B \exp(\frac{Wt}{\tau^E}) + I_D^E - T^E \frac{d}{1 - \rho}. \quad (Gl.2.20)$$

Gesucht wird B:

Die zeitliche Entwicklung des Lagerbestands muss ununterbrochen sein. Die Konstante B wird bestimmt werden, indem die (Gl.2.7) und (Gl.2.16) im Zeitpunkt $t = \tau^E$ ausgeglichen werden.

In $t = \tau^E$ gilt:

$$I_0^E - \frac{d}{1 - \rho} \tau^E = I_D^E - d T^E + B \exp(\frac{W \tau^E}{\tau^E}) \Rightarrow B = I_0^E - I_D^E + d(T^E - \frac{\tau^E}{1 - \rho}) e^{-W},$$

somit gilt:

$$B = L e^{-W}; \quad L = I_0^E - I_D^E + d(T^E - \frac{\tau^E}{1 - \rho}). \quad (Gl.2.21)$$

Allerdings ist die Lagerbilanzgleichung der Einzelhändler aus (Gl.2.5) in der Zeit τ^E :

$$\begin{aligned}
\frac{dI^E(\tau^E)}{dt} &= R^E(\tau^E) - E[D(\tau^E)] \\
\Rightarrow \frac{dI^E(\tau)}{dt} &= O^E(\tau^E - \tau^E) - \frac{d}{1-\rho} \Rightarrow \frac{BW}{\tau^E} e^W = \frac{I_D^E - I_0^E}{T^E} - \frac{d}{1-\rho} \\
&\Rightarrow B = \left(\left(\frac{I_D^E - I_0^E}{T^E} \right) \tau^E - \frac{d}{1-\rho} \tau^E \right) \frac{e^{-W}}{W} \\
\Rightarrow B &= \frac{e^{-W}}{W} R; \quad R = \left(\frac{I_D^E - I_0^E}{T^E} \right) \tau^E - \frac{d}{1-\rho} \tau^E. \quad (Gl.2.22)
\end{aligned}$$

Es gibt jetzt zwei Beziehungen zwischen b und β in der Form von ϕ und Σ . Das System besteht aus den Gleichungen (Gl.2.21) und (Gl.2.22) mit zwei Unbekannten b und β deren Lösungen sind die Randbedingungen der Lösung der VDG.

Die Lösung der Supply Chain Gleichung ist: ($t \geq \tau^E, |\rho| \leq 1$)

$$\begin{aligned}
I^E(t) &= B \exp\left(\frac{Wt}{\tau^E}\right) + I_D^E - T^E \frac{d}{1-\rho} \quad B = b + i\beta \\
W &= W(-\tau^E / T^E) \quad W = \phi + i\Sigma \quad (Gl.2.23)
\end{aligned}$$

mit den Randbedingungen:

$$\begin{aligned}
b &= (e^{-\phi/\Sigma}) [L(\Sigma \cos(\Sigma) + \phi \sin(\Sigma)) - R \cos(\Sigma)] \\
L &= I_0^E - I_D^E + \frac{d}{1-\rho} (T^E - \tau^E). \quad (Gl.2.24)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\beta &= (e^{-\phi/\Sigma}) [L(\phi \cos(\Sigma) - \Sigma \sin(\Sigma)) - R \cos(\Sigma)] \\
R &= \left(\frac{I_D^E - I_0^E}{T^E} \right) \tau^E - \frac{d}{1-\rho} \tau^E. \quad (Gl.2.25)
\end{aligned}$$

(Gl.2.23) zeigt, dass die Lösung auch komplexwertig ist und das Lagerverhalten von den Eigenschaften der Lambert W Funktion dominiert ist.

2.1.2 Sensitivitätsanalyse

Der Zusammenhang zwischen der Nachfrage- und der Autokorrelationsfunktion ist in der Abbildung 1.1 dargestellt. Die Struktur der Gleichung (Gl.1.1) wird durch die Konstante ρ dargestellt, und der Verlauf der Nachfrage hängt von Vorzeichen und ihre Größe von ρ ab

(Allen 1971, S. 28). Ist der Trend steigend, wird etwas mehr bestellt, um der möglichen Nachfrage beizukommen. Dann ist der Autokorrelationsfaktor positiv gewählt (z.B. $\rho = 0.8$). Dazu läuft die Autokorrelations-Funktion ($\varphi(k) = 0.8^k$) exponentiell gegen Null und die Nachfrage schwingt langsamer. Die Nachfragefunktion steigt erst schnell (s. Abb. 1.1) und dementsprechend sinkt der Lagerbestand auch sehr schnell (s. Abb. 1.2). Danach sinkt die Nachfrage sehr tief und der Lagerbestand steigt dementsprechend sehr schnell.

Wenn ρ negativ ist (z. B. $\rho = -0.8$), dann schwingt die Nachfrage schneller. Die Autokorrelationsfunktion ($\varphi(k) = -0.8^k$) alterniert – mal positiv, mal negativ – und verfällt auch exponentiell gegen Null. Die Nachfragefunktion alterniert auch, -mal steigt, -mal sinkt aber im Allgemein steigt langsam (s. Abb. 1.1). Dementsprechend sinkt der Lagerbestand langsamer (s. Abb. 1.2).

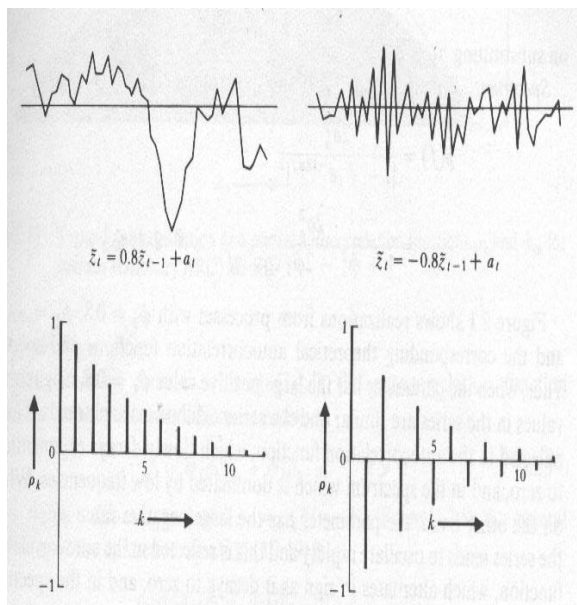


Abb. 1.2: Die Nachfrage- und ihre entsprechenden Autokorrelationsfunktionen (Quelle: Box und Jenkins 1976, S.57).

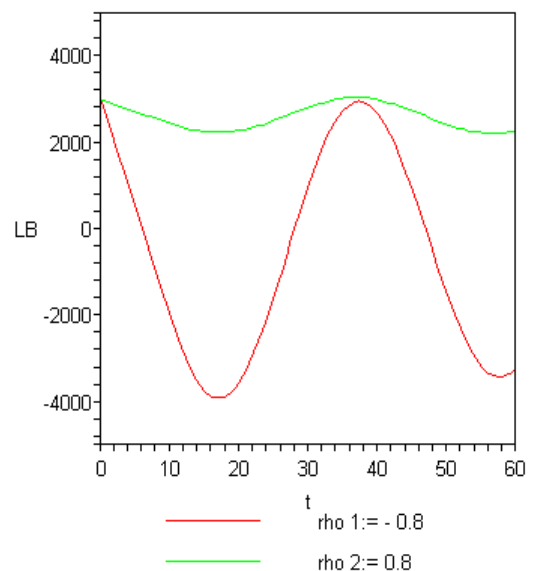


Abb. 1.3: Die Entwicklung des Lagerbestandes der Einzelhändler mit unterschiedlichen Werten von ρ ($\tau^E = 10, |\rho| \leq 1$).

2.1.3 Lagerhaltungszyklus

Es wird noch einmal die Bedingung, die realitätsnäher ist, demonstriert. (Gl.2.1a) zeigt, dass die Bestellung auf Null gehen sollte, wenn das Lager seinen Zielbestand übersteigt. Der Zeitpunkt T_D^E ist die Zeit, bei der der Lagerbestand zu seinem erwünschten Wert zurückkehrt. Tatsächlich ist die Bestellung an dieser Zeitpunkt (T_D^E) auf Null zu setzen, aber Waren werden beim Einzelhändler weiterhin angeliefert, weil es immer noch Bestellungen in der

“Pipeline“ gibt. Mit dem Pipeline-Konzept ist die Bestellung, die in Lagern und auf Transportwegen befindlichen Waren der Wertschöpfungspartner sind. Der Lagerbestand schießt über seinen Zielstand hinaus, und es braucht mehr Zeit, der Wiederbeschaffungszeit (τ^E), bis die “Pipeline“ sich leert.

Nach dem Zeitpunkt $t = T_D^E + \tau^E$ bleiben nur die sich fortsetzenden Verbraucherforderungen, und so gilt (Gl.2.10) wieder

$$I^E(t) = I_0^E - (D(0) - \frac{d}{1-\rho}) \left(\frac{\exp(t \ln(\rho)) - 1}{\ln(\rho)} \right) - \frac{dt}{1-\rho}.$$

Wenn der Lagerbestand wieder sein erwünschtes Niveau erreicht, wiederholt sich der Lagerzyklus. Außerdem hängen mehr theoretische Auswirkungsmodelle direkt von der WBZ ab. Und alle Modelle oder Simulationen, die den WBZ richtig bestimmen wollen, sollten die Stabilitätseigenschaft¹⁵ einbeziehen (Warburton, 2004, S. 151-152).

2.1.4 Steuerung des Lagerbestandes

Nach der analytischen Untersuchung des BWE mit stochastischem Nachfrageprozess, kann die Zeit des Höhepunktes des Lagerbestands t^* ermittelt werden, wenn (Gl.2.20) nach t abgeleitet und gleich null eingesetzt wird.

$$dI^E(t)/dt = 0 \Rightarrow t_2^* = \frac{\tau^E}{\Sigma} \arctan\left[-\frac{\beta\varpi + b\Sigma}{b\varpi - \beta\Sigma}\right] \quad \text{und} \quad t_1^* = \frac{\tau^E}{\Sigma} \arctan\left[\frac{b\varpi + \beta\Sigma}{\beta\varpi - b\Sigma}\right].$$

Es wird der Lagerbestandshöhepunkt zum Zeitpunkt:

$$t_1^* = \frac{\tau^E}{\Sigma} \arctan\left[\frac{b\varpi + \beta\Sigma}{\beta\varpi - b\Sigma}\right] \quad (\text{Gl.2.26})$$

angenommen:¹⁶

Jedoch gibt es einen kritischen Wert der Regulierungszeit (T^E), für die der Lagerbestand zu seinem erwünschten Wert rückt und zwar ohne *Overshoot*, d. h. $I^E(t^*) = I_D^E$:

¹⁵ Diese Untersuchung gilt unter der Annahme eines dynamischen Systems. Mit Stabilität ist gemeint dass das System zu einer Störung des Eingabesignals auf eine gesteuerte Weise reagiert (Disney 2002, S. 4)

¹⁶ Er wird das Gleiche angenommen wie bei R. D. H. Warburton (2004, S. 153). Darüber hinaus muss $t_1 \prec t_2$, daraus folgt t_1 ist die Zeit der Höhepunkt der *Overshoot* und t_2 die Zeit der Höhepunkt des Defizits.

$$I_D^E = I_D^E - T^E \frac{d}{1-\rho} + B \exp(W t / \tau^E).$$

$$\Rightarrow B \exp(W t^* / \tau^E) = T^{E*} \frac{d}{1-\rho}. \quad (Gl.2.27)$$

Da das Argument der Lambert W Funktion von $(-\tau^E / T^E)$ abhängt und die Konstante C von T^E abhängt, kann T^{E*} numerisch berechnet werden.

Weil der Hersteller die Wiederbeschaffungszeit (τ^E) bestimmt, wird der Parameter T^E eingeführt, um beim Einzelhändler die Lagerbestandsentwicklung zu adjustieren. Und wenn der Einzelhändler eine Änderung in der Nachfrage bemerkt und schätzt, kann er mit Hilfe der Lagerperiode durch das Einsetzen $T = T^{E*}$ ermitteln, wann und in welcher Höhe eine Bestellung zur Wiederauffüllung eines Lagers auszulösen ist und zwar ohne *Overshoot* und ohne Defizit.

Im Folgenden wird das dauerhafte Vorkommen des Lagerdefizits formal bestätigt.

2.1.4 Dauerhaftes Lagerdefizit

Die theoretische Lösung im stabilen Regime sagt dauerhaft Lagerbestandsdefizite vorher.

Wenn $\tau^E / T^E < \pi/2$ ist, ist der reelle Teil von $W(z)$ negativ für große t . Außerdem tendiert, für kleine negative Werte von (τ^E / T^E) der Wert von $\exp(W t / \tau^E)$ gegen null.

Das Verhalten des Lagerbestandes (Gl.2.20) im Unendlichen ergibt:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} I^E(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} C \exp(W t / \tau^E) + I_D^E - T^E \frac{d}{1-\rho}$$

$$= I_D^E - T^E \frac{d}{1-\rho}. \quad (Gl.2.28)$$

Der Lagerbestand fällt permanent unter seinen erwünschten Wert von $(d T^E / 1 - \rho)$.

2.1.5 Einfluss der Einzelhändler auf den Peitscheneffekt

Schwankungen der Bestellungen werden entlang der Wertschöpfungskette verstärkt. Jedoch lässt sich die Höhe des Peitscheneffekts mit mathematischen Modellen berechnen. Die Bestellvariabilität in Supply Chains nimmt vom Endkunden über den Einzelhändler bis zu den Herstellern und ihren Zulieferern immer zu. Dieses Verhalten, allgemein auch Peitscheneffekt genannt, ist in jeder Supply Chain offensichtlich; das ist eine Zeitverzögerung zwischen Nachfragebefriedigung und Produktionsänderung.

Die Bestellung der Einzelhändler wird von der Gleichung $O^E(t) = (I_D^E(t) - I^E(t)) / T^E$ gegeben. Die genaue Lösung des Lagerbestandes $I^E(t)$ ist in (Gl.2.7) hergeleitet. Darüber hinaus ist die Bestellung gleich null zu setzen, wenn der Lagerbestand seinen erwünschten Wert (I_D^E) übersteigt, und bleibt auch bei null für den Rest des Lagerzyklus.

Der BWE ist das Verhältnis von der Bestellrate des Einzelhändlers zu der Nachfragerate. Die Einzelhändler-Bestellrate steigt bis zu einem Höhepunkt, der bald den Zeitpunkt τ^E erreicht, und deshalb ist die Zeit τ^E eine geeignete Zeit, bei der die Raten zu vergleichen sind. Die Nachfragerate wird dazu auch in der Zeit τ^E berechnen werden.

Der BWE ist:

$$BW^E = \frac{O(\tau^E)}{E[D(\tau^E)]} = \frac{I_D^E - I(\tau^E)}{T^E d} (1 - \rho). \quad (Gl.2.29)$$

Allerdings gilt aus der Lagebestand (Gl.3.4) in der Zeit $t = \tau^E$:

$$I(\tau^E) = I_0^E - \frac{d}{1 - \rho} \tau^E = I_D^E - \frac{d}{1 - \rho} \tau^E \quad (Gl.2.30)$$

$$\Rightarrow \tau^E = (1 - \rho) \frac{I_D^E - I(\tau^E)}{d}. \quad (Gl.3.31)$$

Einsetzen (Gl.2.30) in (Gl.2.29) ergibt den Peitscheneffekt:

$$BW^E = \tau^E / T^E. \quad (Gl.2.32)$$

Der Einfluss der Einzelhändler auf den Peitscheneffekt mit stochastischem Nachfrageprozess (Gl.2.33) ist gleich dem Einfluss der Einzelhändler auf den Peitscheneffekt mit konstantem Nachfrageprozess (s. Warburton 2004, S. 154).

Die zweite vorgeschlagene Quantifizierung der BWE bedeutet: Es wird die Zunahme an Lagerbestandsschwankungen eher berücksichtigt als Bestellschwankungen. Der *Undershoot* bzw. das Defizit wird als der Rückgang, durch die Wiederauffüllungszeit, definiert, während

der Lagerbestand auf die Menge $\frac{d}{1 - \rho} \tau^E$ fällt.

$$BW_L^E = \frac{\text{Overshoot}}{\text{Undershoot}} = \frac{I^* - I_D^E}{\frac{d}{1 - \rho} \tau^E}. \quad (Gl.2.33)$$

Diese Messung des Peitscheneffekts hat einen anderen Charakter als die in (Gl.2.42), weil das Verhalten des *Overshootings* anders ist als das Verhalten der Bestellung. Daher konnte

der *Overshoot* besser adjustiert werden, in dem die Lagerperiode gut eingesetzt wird. In der Tat ist in dem kritischen Fall T^* (s. Abb. 2.5) das Überschießen adjustiert, um gleich null zu sein:

$$I^* = I_D^E \quad \Rightarrow \quad BW_I^E = 0. \quad (Gl.2.34)$$

Schlussfolgerung:

- Wenn der BWE im Lagerbestand verstellt wird, um gleich null zu sein, kann er noch in Bestellungen verbleiben.
- Wenn es wichtiger ist, das Lager aufzufüllen, als Bestellschwankungen zu minimieren, ist (Gl.2.33) eine bessere Maßnahme bezüglich der Wirkung von Nachfrageschwankungen.
- Wenn die Bestellschwankungen wichtiger sind als das Ausfüllen des Lagerbestandes, ist die Gleichung (Gl.2.32) vorzuziehen.

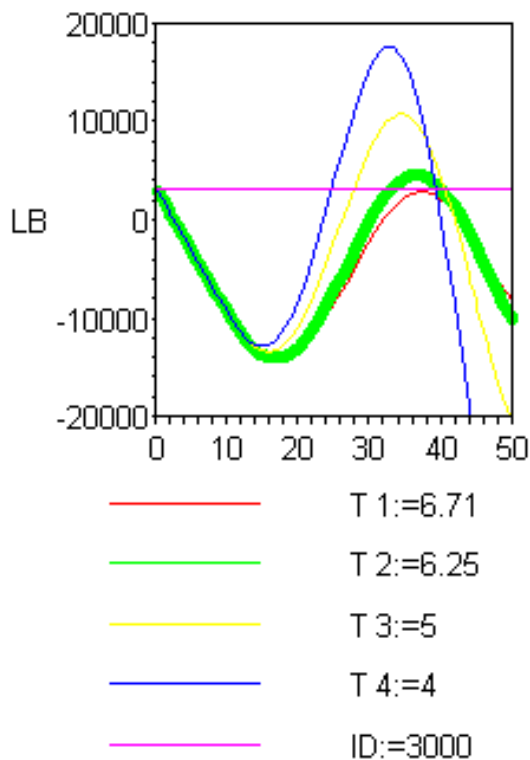


Abb. 1.4: Der zeitliche Verlauf des Lagerbestandes der Einzelhändler mit unterschiedlichen Werten von T ; $T^* = 6.7$ entspricht der Lagerperiode, die den Lagerbestand zum Zielbestand zurückbringt ($\tau^E = 10, |\rho| \leq 1, \rho \neq 0$).

Das Paradoxon der Reduzierung der BWE und der dauerhaften Lagerdefizite ist bemerkbar. Die Erhöhung des Wertes T^E um den BWE zu reduzieren, hat die Zunahme der dauerhaften

Lagerdefizite zur Folge. Der Lagerbestand kann nicht zu seinem erwünschten Niveau zurückgeführt werden ohne verbleibende Lagerdefizite; das ist die Eigenschaft der Supply-Chain-Gleichung (Warburton et al. 2004, S. 8).

Im Folgenden wird Die Hersteller-Wertschöpfungskette untersucht.

2.2 Hersteller-Wertschöpfungskette-Modell

Um eine bestmöglich Erfüllung der angestrebten Zielvorgaben bezüglich Lieferzeit, Termin- und Mengentreue sowie der Produktionskosten zu erreichen, müssen unter anderem die Bestände in allen Stufen der Supply Chain bewertet werden. Dazu werden die gleichen Annahmen hier über die Bestellpolitik und die Lagerbilanzgleichung wie in Unterabschnitt 2.1 getroffen.

Basierend auf Forrester lautet die Bestellpolitik der Hersteller ist:

$$O^H(t) = \text{Arg max}(0, \frac{I_D^H - I^H(t)}{T^H}) \quad (\text{Gl.2.35})$$

$I^H(t)$: Der tatsächliche Lagerbestand¹⁷ der Hersteller in t .

I_D^H : Der erwünschte Lagerbestand der Hersteller.

T^H : Der Bestellzyklus oder die Lagerperiode der Einzelhändler.

2.2.1 Lösung der Supply Chain Gleichung

Die Lagerbilanzgleichung der Hersteller lautet:

$$\frac{dI^H(t)}{dt} = R^H(t) - S^H(t). \quad (\text{Gl.2.36})$$

$R^H(t)$ stellt die Lagerauffüllrate dar, die entweder stromaufwärts von den Lieferanten oder aus der eigenen Produktion der Hersteller stammen kann. Der Rückgang S^H stellt die Sendungsrate der Hersteller zum Einzelhändler dar.

Die Empfänge vom Lieferanten sind von den Bestellungen der Hersteller und denen der Wiederauffüllungsverzögerungszeit abhängig.

Außerdem wird angenommen, dass der Lageranfangsbestand (I_0^H) der Hersteller sein Zielanfangsbestand (I_D^H) ist.¹⁸

¹⁷ Der Lagerbestand ist der tatsächliche Lagerbestand ohne Berücksichtigung der Bestände, die sich in Pipeline befinden.

Das Lagerbestand verfällt, wenn Waren zum Einzelhändler verschickt werden. Dies verhält sich proportional zu den Bestellungen der Einzelhändler. Die Lagerauffüllrate der Hersteller hängt von den Bestellungen der Einzelhändler und der assoziierten Wiederauffüllungsverzögerungszeit (τ^H) ab.¹⁹

Es spiegeln sich zu Beginn die Sendungen der Hersteller in den erhaltenen Aufträgen in der Zeit $t - \tau^H$ wieder:

$$S^H(t) = O^E(t - \tau^H). \quad (Gl.2.37)$$

Es wird angenommen, dass den Schwierigkeiten der Hersteller in der Bestellpolitik die gleichen wie diejenigen der Einzelhändler sind,²⁰ nämlich die adäquate Wahl der Bestellpolitik.

Einschließlich der Zeitverzögerung der Lieferanten ist die Empfangrate der Hersteller für die Zeit $t \leq \tau^H$:

$$R^H(t) = 0.$$

Daraus gilt für den Lagerbestandsgleichung (Gl.2.36):

$$\frac{dI^H(t)}{dt} = -\frac{I_D^E - I^E(t - \tau^H)}{T^E}. \quad (Gl.2.38)$$

Allerdings für $t \leq \tau^E$ gilt auch $t - \tau^H \leq \tau^E$.

Somit ist der Lagerbestand der Einzelhändler für die Zeit $t - \tau^H$ aus (Gl.3.7):

$$I^E(t - \tau^H) = I_0^E - \frac{d}{1 - \rho}(t - \tau^H). \quad (Gl.2.39)$$

Einsetzen (Gl.2.39) in (Gl.2.38) ergibt die Lagerbilanzgleichung der Hersteller:

$$\frac{dI^H(t)}{dt} = -\frac{I_D^E - I_0^E + \frac{d}{1 - \rho}(t - \tau^H)}{T^E} = -\frac{d}{(1 - \rho)T^E}(t - \tau^H), \quad (Gl.2.40)$$

Integrieren (Gl.2.40) nach t ergibt:

$$\int_0^{I_0} dI^H(x) = \int_0^t -\frac{d}{(1 - \rho)T^E}(x - \tau^H) dx \Rightarrow I^H(x) - I_0^E = -\frac{d}{(1 - \rho)T^E} \int_0^t (x - \tau^H) dx$$

¹⁸ Diese Annahme vereinfacht die mathematische Rechnung; jedoch ist dieser ein Grund des Suboptimalverhaltens im Beispiel-Modell von Sternman (Sternman 1989, 330 f.).

¹⁹Der gleiche Prozess bewährt sich, wenn Waren intern produziert werden, wo der Hersteller interne Aufträge ausgibt (Warburton 2004, S. 155).

²⁰ Der Hersteller muss für die gleiche produzierte Ware unterschiedliche Sub-Komponenten bestellen.

$$\Rightarrow I^H(t) = I_0^E - \frac{d}{(1-\rho)T^E} \left(\frac{t^2}{2} - t\tau^H + \frac{\tau^{H^2}}{2} \right)$$

$$\Rightarrow I^H(x) = I_0^E - \frac{d}{(1-\rho)2T^E} (t - \tau^H)^2.$$

Der Lagerbestand der Hersteller ist: ($t \leq \tau^E, |\rho| \leq 1$)

$$I^H(t) = I_0^H - \frac{d}{1-\rho} (t - \tau^H)^2 / 2T^E. \quad (Gl.2.41)$$

Die Lösung in (Gl.2.41) ist die initiale Antwort der Hersteller (s. Abb. 1.1) und die Lösung ist gültig bis die Sendungen vom Lieferanten ankommen.

2.2.2 Der Einfluss der Hersteller auf den Peitscheneffekt

Der Peitscheneffekt resultiert aus den komplexen und dynamischen Abhängigkeiten in der Supply Chain. Je weiter stromaufwärts man sich bewegt, desto größer wird der Anteil der Wertschöpfungsteilnehmer. Dies ist wahrscheinlich die berühmteste Demonstration der Systemdynamik in WK (Fiala 2005, S. 420).

Das Einsetzen (Gl.2.41) in (Gl.2.35) ergibt die Bestellrate der Hersteller in der Zeit t :

$$O^H(t) = \frac{I_D^H - I_0^H + \frac{d}{2T^E(1-\rho)}(t - \tau^H)^2}{T^H} = \frac{d}{2T^E T^H (1-\rho)} (t - \tau^H)^2. \quad (Gl.2.42)$$

Darüber hinaus ist die Bestellrate der Einzelhändler (Gl.2.1) in der Zeit τ^E :

$$O^E(\tau^E) = \frac{I_D^E - I^E(\tau^E)}{T^E} = \frac{d}{T^E(1-\rho)} (t - \tau^H). \quad (Gl.2.43)$$

Der Höhepunkt der Bestellung der Hersteller ist tatsächlich erreicht, wenn die Waren vom Lieferanten und zwar in den Zeitpunkten $t = \tau^L + \tau^H$ eintreffen (τ^L : Der WBZ der Lieferanten).

Der Einfluss der Hersteller auf den Peitscheneffekt ist formal gegeben als das Verhältnis der Bestellrate der Lieferanten zu der Bestellrate der Einzelhändler. Der Höhepunkt der Bestellung der Hersteller ist tatsächlich erreicht, wenn die Waren vom Lieferant und zwar im Zeitpunkt $t = \tau^L + \tau^H$ eintreffen.

Der BWE ist:

$$BW^H = \frac{O^H(t)}{O^E(\tau^E)}. \quad (Gl.2.44)$$

Einsetzen der Gleichungen (Gl.2.42) und (Gl.2.43) in (Gl.2.44) ergibt den Einfluss der Hersteller auf den Peitscheneffekt:

$$BW^H = \frac{O^H(t)}{O^E(\tau^E)} = \frac{(t - \tau^H)^2}{2(1 - \rho)T^H \tau^H} = \frac{(\tau^L + \tau^H - \tau^H)^2}{2(1 - \rho)T^H \tau^H} = \frac{\tau^{L^2}}{2(1 - \rho)T^H \tau^H}. \quad (Gl.2.45)$$

(Gl.2.45) misst die Vergrößerung an Bestellungen, die einzig und allein auf den Hersteller zurückzuführen sind. Aber die Vorstellung der Hersteller von den Bestellraten ist ebenso unrealistisch wie diejenige der Einzelhändler.

Die Bestellungen der Hersteller resultieren aus der Bestellausgabe der Einzelhändler. Diese spiegeln eine verstärkte Version der Verbraucherausforderung wieder. Also ist der totale Peitscheneffekt vom Konsumenten zum Lieferanten die folgende Kombination:

$$BW^{K \rightarrow L} = BW^E BW^H = \frac{\tau^{L^2} \tau^E}{2(1 - \rho) \tau^H T^E T^H}. \quad (Gl.2.46)$$

(Gl.2.46) zeigt die multiplikativen Auswirkungen des Peitscheneffektes (Warburton 2004, S. 155).

Zusammenfassung

Die Unternehmen sehen sich zunehmend einem Wandel ihres Umfeldes ausgesetzt. Dadurch ist Supply Chain Management in den letzten Jahren zu einem viel beachteten Konzept der Unternehmensteuerung geworden. Die Ansprüche an die Wertschöpfungskette (WK) sind dementsprechend hoch. Um schnell auf veränderte Wünsche der Kunden reagieren zu können, muss die WK besonders flexibel und transparent sein. Nur wer es schafft eine gemeinsame effiziente Reaktion auf den Kundennachfrage herzustellen, wird im ständig zunehmenden Wettbewerb vorne bleiben. Im Allgemeinen sind aber Ereignisse, wie plötzlicher Nachfrageanstieg für die Unternehmen, kaum prognostizierbar. Bei solchem Nachfrageanstieg können sie lagerunfähig bleiben. Dennoch können mit dem Einsetzen von Supply Chain Software hohe Verbesserungspotentiale erzielt werden, von denen die Unternehmensglieder ebenso wie die Endkunden profitieren.

Der Peitscheneffekt ist ein wichtiger Indikator der Erfolgsmessung in der WK. Es gibt viele Wege diesen Effekt formal zu messen. Eine Theorie für eine allgemeine systematische Erklärung des Peitscheneffekts gibt es bislang aber noch nicht. Jedoch basieren viele Untersuchungen zum Peitscheneffekt auf der Minimierung der Lagerkosten.

Das Ziel dieser Untersuchungen ist, die Einflussgrößen des Lagerbestandes einzustellen, um einen erwünschten Lagerbestand zu erreichen. Der Simulationsprozess erlaubt es, Kausalbeziehungen zwischen den konstituierenden Elementen des Lagerbestandes zu beschreiben. Die Wiederbeschaffungszeit und die Lagerperiode sind verantwortlich für das komplizierte Verhalten des Lagerbestandes. Allerdings sind die Untersuchungen zum Peitscheneffekt, mit den unrealistischen Annahmen einer konstanten Nachfrage, nützlicher. Der Simulationsprozess erlaubt mit dieser Annahme die Überprüfung der Störung des Lagerbestandes und zwar ohne Einfluss der nachfragestrategischen Parameter.

In dieser Arbeit wurde gezeigt, dass die Lösung von R. D. H. Warburton nicht nur für die konstante Nachfrage, sondern auch für andere Nachfrageprozesse gelten kann. Die Dauer der Schwankungen wird vom komplexen exponentiellen Teil der homogenen Lösung bestimmt, da der Nachfrageprozess nur auf die inhomogene Lösung einwirken kann. Für den Nachfrageprozess vom Typ "Autoregressiver Prozess erster Ordnung" ist es gelungen, neue Lösungen herzuleiten. Dazu sind die Wiederholung des Lagerzyklus, das dauerhafte Lagerdefizit und die Steuerung des Lagerbestandes formal/mathematisch bestätigt worden.

Darüber hinaus wurde sich in dieser Arbeit auch hauptsächlich mit der Schnittstelle zwischen einem Endkunde und einem Einzelhändler beschäftigt. Diese isolierte Betrachtung

kann sich nicht als Suboptimal erwiesen werden. Hierbei lassen sich aber die Ansätze, die vorgestellt wurden, auf andere Schnittstellen übertragen, wie die Schnittstellen vom Lieferanten zum Hersteller. Der Fokus auf einer oder zweier Schnittstellen ist eine einfache Darstellung der wahren Welt. Dort gibt es viele Hersteller und viele Lieferanten. Darüber hinaus ist jedes Wertschöpfungsglied ein autonomer Entscheidungsträger, deshalb bleibt die Optimierung der gesamten Wertschöpfungskette eine grosse Herausforderung. Diese gesamte Arbeit wurde theoretisch ausgewertet. Ob es sich in eine alltagstaugliche Realität überführen lässt, ist fraglich.

Mathematischer Anhang : Die Lambert W Funktion

Die Lambert W Funktion ist die inverse Funktion f^{-1} der Funktion:

$$f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C} \quad (\mathbb{C} \text{ ist der Raum der komplexen Zahlen})$$

$$x \rightarrow x \exp(x)$$

$W(x)$ ist die komplexe Zahl, die die Voraussetzungen $W(x) \exp[W(x)] = x$ erfüllt. Sie hat die folgenden Eigenschaften:

$$W(x e^x) = x \quad (Gl.A1)$$

und

$$\frac{dW(x)}{dx} = \frac{W(x)}{x + xW(x)}. \quad (Gl.A2)$$

Sie ist über folgende Summe berechenbar (Corless 1996, S. 349):

$$W(x) = \ln(x) - \ln(\ln(x)) + \sum \sum C_{mk} (\ln(\ln(x)))^m \ln(x)^{-k-m}. \quad (Gl.A3)$$

Die Gleichung $y \exp(y) = x$ hat genau eine reelle Lösung für alle reellen Zahlen $x \geq 0$; Sie wird durch $y = \text{Lambert } W(x)$ oder genau durch $W(k;x)$ dargestellt. In der Tat hat die Lambert W Funktion unendliche Zweige. Diese Zweige sind notiert $W(k;x)$.

Wegen der Linearität der Gleichung (Gl.2.14) kann jeder Kombination von $W(k;x)$ verwendet werden und können wir die Lösung in der Form berücksichtigen:

$$I(t) = \sum_k c(k) \text{Exp}[W(k, -\tau/T), t/\tau]. \quad (Gl.A4)$$

(Gl.A4) ist eine unendliche Formel. Die Lösungen die leicht zu implementieren sind, sind von Interesse. Außerdem sind für $k=0$ und $k=1$ die einzigen Zweige vom Lambert W Funktion mit reellen Funktionswerten. In Dieser Arbeit ist der Fall $k=0$ angenommen.

$$\text{Der Hauptzweig ist: } W = W(0, z) = W(0, \frac{-\tau}{T}). \quad (Gl.A5)$$

Betrachten wir: $W = \omega + i\Omega$,

- i ist komplexe Zahl
- ω, Ω sind reelle Zahlen.

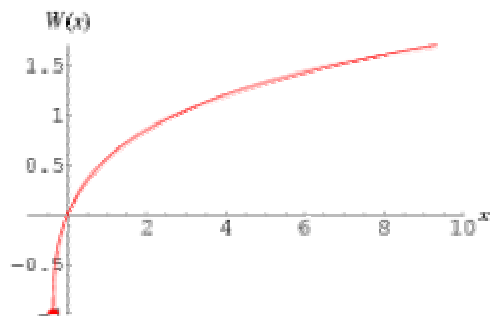


Abb. A1: Die Zwei reelle Zweigen von $W(x), \dots, W_0(x); \dots, W_{-1}(x)$

(<http://mathworld.wolfram.com/LambertW-Function.html>).

Literaturverzeichnis

- Allen, R. G. D. (1971): Mathematische Wirtschaftstheorie. Berlin: Duncker und Humboldt.
- Bellman, R. E. / Cooke, K. L. (1963): Differential-difference equations New York: Academic Press.
- Box, G. E. P. / Jenkins, G. M. (1976): Time Series Analysis: Forecasting and control. Düsseldorf [u. a.]: Holden-day.
- Buxmann, P. et al. (2003): Kooperation in Supply Chains: Ökonomische Bewertungsansätze und Anwendung eines Simulationsmodells. http://www.is.tu-darmstadt.de/download/kooperation_oekonomische_bewertung_und_simulation.pdf.
- Chatfield, D. K. / Kim, J. G. / Harrison, T, P / Hayya, J. C. (2004): The BWE-Impact of Stochastic Lead Time, Information Quality, and Information Sharing: A Simulation Study, S. 340-353, POMS. Vol. 13, Nr. 4.
- Cordless, R. M. Gonnet, G. H. / Jeffrey, D. J. / Knut D. H. (1996): On the Lambert W function. Advance in Computational Mathematics 5. S. 329-359.
- Disney, S. M. / Towill, D. R.: A robust and stable analytical solution to the production and inventory problem via a z-transform approach. Logistics Systems Dynamics Group, Cardiff Business School, Cardiff University, Aberconway, England. www.ipe.liu.se/rwg/igls/igls2002/Paper039.pdf.
- Fiala, P. (2005): Information sharing in supply chains. S. 419-423. Omega 33. The International Journal of Management Science.
- Hansman, K. W. / Ringle, C. M. (2005): Erfolgsmessung und Erfolgswirkung Virtueller Unternehmen. ZFO 74. Jahrgang1.
- Kahn, J. A. (1987): Inventory and Volatility of Production. American Economic Review 77. S. 667-643.
- Lee, H. L. (2004): the Triple-A Supply Chain. Harvard Business Review. Oktober 2004. S. 102- 112.
- Lee, H. L. /Padmanabahn, V. /Whang, S. (1997): The Bullwhip effect in Supply chains. Sloan Management Review 38(3). S. 93-102.
- Mielke, A. (2005): Stochastische Modelle. Heidelberg. März 2005. <http://www.andreas-mielke.de/sm.pdf>.
- Schneeweiss, C. (1999): Einführung in die Produktionswirtschaft.7. Auflage Berlin: Springer.
- Tempelmeier, T.(2003): Materiallogistik. 5.Auf. Berlin: Springer.

- Warburton, R. D. H. (2004): An Analytical Investigation of the Bullwhip Effect. POMS. Vol.13, Nr.2. S. 150-160.
- Warburton, R. D. H. / Hodgson J. P. E./ Kim, Y. K. (2004): An Analytical Investigation of the Bullwhip Effect. NTC Project: S03-MD13s. <http://www.ntcresearch.org/pdf-rpts/Bref0604/S03-MD13s-04e.pdf>.
-

**Diskussionsbeiträge
des Fachbereichs Wirtschaftswissenschaft
der Freien Universität Berlin**

2005

- 2005/1 CORNEO, Giacomo
Media Capture in a Democracy : the Role of Wealth Concentration
Volkswirtschaftliche Reihe
- 2005/2 KOULOVIATIANOS, Christos / Carsten SCHRÖDER / Ulrich SCHMIDT
Welfare-Dependent Household Economies of Scale: Further Evidence
Volkswirtschaftliche Reihe
- 2005/3 CORNEO, Giacomo
Steuern die Steuern Unternehmensentscheidungen? 20 S.
Volkswirtschaftliche Reihe
- 2005/4 RIESE, Hajo
Otmar Issing und die chinesische Frage – Zu seinem Ausflug in die Wechselkurspolitik
Volkswirtschaftliche Reihe
- 2005/5 BERGER, Helge / Volker NITSCH
Zooming Out: The Trade Effect of the EURO in Historical Perspective
Volkswirtschaftliche Reihe
- 2005/6 JOCHIMSEN, Beate / Robert NUSCHELER
The Political Economy of the German Länder Deficits
Volkswirtschaftliche Reihe
- 2005/7 BITZER, Jürgen / Monika KERÉKES
Does Foreign Direct Investment Transfer Technology Across Borders?
A Reexamination. 19 S.
Volkswirtschaftliche Reihe
- 2005/8 KONRAD, Kai A.
Silent Interests and All-Pay Auctions
Volkswirtschaftliche Reihe
- 2005/9 NITSCH, Volker
Currency Union Entries and Trade
Volkswirtschaftliche Reihe
- 2005/10 HUGHES HALLETT, Andrew
Are Independent Central Banks as Tough as They Pretend? 11 S.
Volkswirtschaftliche Reihe
- 2005/11 KOULOVIATIANOS, Christos / Carsten SCHRÖDER / Ulrich SCHMIDT
Non-market time and household well-being
Volkswirtschaftliche Reihe
- 2005/12 NITSCH, Manfred / Jens GIERSDORF
Biotreibstoffe in Brasilien. 22 S.
Volkswirtschaftliche Reihe
- 2005/13 Lateinamerika als Passion. Ökonomie zwischen den Kulturen.
Ein Interview mit MANFRED NITSCH. 14 S.
Volkswirtschaftliche Reihe
- 2005/14 MISLIN, Alexander
Die Stabilisierungsfunktion von Geldpolitik in der kurzen Frist. 38 S.
Volkswirtschaftliche Reihe

- 2005/15 BOYSEN, Ole / Carsten SCHRÖDER
Economies of Scale in der Produktion versus Diseconomies im Transport.
Zum Strukturwandel in der Milchindustrie
Volkswirtschaftliche Reihe
- 2005/16 TOMANN, Horst
Die Geldpolitik der Europäischen Zentralbank – besser als ihr Ruf
Volkswirtschaftliche Reihe
- 2005/17 SASAKI, Noboru
The Recent Trend in EU Foreign Direct Investment and Intra-EU Investment
Volkswirtschaftliche Reihe
- 2005/18 WOLF, Nikolaus
Endowments vs. market potential: what explains the relocation of industry after the
Polish reunification 1918?
Volkswirtschaftliche Reihe
- 2005/19 RICHTER, Thorsten / Alexandra LANGER / Martin EISEND
Markenerfolg durch Persönlichkeit? – Einfluss von Markenpersönlichkeitsdimensionen
auf die Einzigartigkeit der Marke und die Einstellung zur Marke
Betriebswirtschaftliche Reihe
- 2005/20 WOLF, Nikolaus / Max-Stephan SCHULZE
Harbingers of Dissolution? Grain Prices, Borders and Nationalism in the Habsburg
Economy before the First World War
Volkswirtschaftliche Reihe
- 2005/21 BESTER, Helmut
Externalities, Communication and the Allocation of Decision Rights
Volkswirtschaftliche Reihe
- 2005/22 HASSLER, UWE / Jürgen WOLTERS
Autoregressive Distributed Lag Models and Cointegration
Volkswirtschaftliche Reihe
- 2005/23 WOLTERS, Jürgen / Uwe HASSLER
Unit Root Testing
Volkswirtschaftliche Reihe