Fach: Finanzierung und Investition

Prüfer: Prof. Dr. Dr. A. Löffler

Veranstaltung: W2261 Entscheidungstheorie WS 08/09

Name	
Vorname	
Matrikelnummer	
Punkte	
Note	

Beachten Sie bitte folgende Hinweise:

1. Schreiben Sie bitte Ihre Lösung in die vorgegebenen Leerzeilen des Aufgabenblattes sowie, sollte der Platz nicht ausreichen, auf die leeren Rückseiten.
2. Rechnen Sie auf mindestens fünf genaue Ziffern (das sind nicht notwendigerweise fünf Nachkommastellen) im Endergebnis.[1]
3. Eine Aufgabe wird nur dann gewertet, wenn der Lösungsweg klar zu erkennen ist.
4. Klausuren, die unleserlich sind, werden nicht bewertet. Das gleiche gilt, wenn Sie mit Bleistift schreiben.
5. Nur nicht–programmierbare Taschenrechner sowie ein Wörterbuch ohne handschriftliche Einträge sind zugelassen.
6. Diese Klausur enthält **ohne** Deckblatt **8** Seiten (davon 2 Schmierblätter am Ende).

Und nun **viel Erfolg** …

[1] Ist das exakte Ergebnis beispielsweise 113.941,7234, dann bedeutet eine Genauigkeit auf fünf Ziffern 113.940.

Aufgabe 1 (8 Punkte)

Betrachten Sie Güterbündel mit jeweils zwei Gütern $X = (X_0, X_1)$ und folgende Präferenzrelation

$$X \succeq Y :\iff (X_0 \geq Y_0 \text{ oder } X_1 \geq Y_0) \text{ und } (X_0 \geq Y_1 \text{ oder } X_1 \geq Y_1)$$

Prüfen Sie die Gültigkeit der Vergleichbarkeit und Transitivität und zeichnen Sie die Bessermenge.

Lösung: Vergleichbarkeit: Ja. Transitivität: Ja.

Aus (1) folgt:

$$\begin{aligned}
&X \succeq Y :\iff (\max(X) \geq Y_0) \text{ und } (\max(X) \geq Y_1)\\
&bzw.\\
&X \succeq Y :\iff \max(X) \geq \max(Y)
\end{aligned}$$

Es existiert die Nutzenfunktion $U(X) = \max(X)$. Daraus folgt, dass die Präferenzrelation die drei Axiome erfüllen muss.

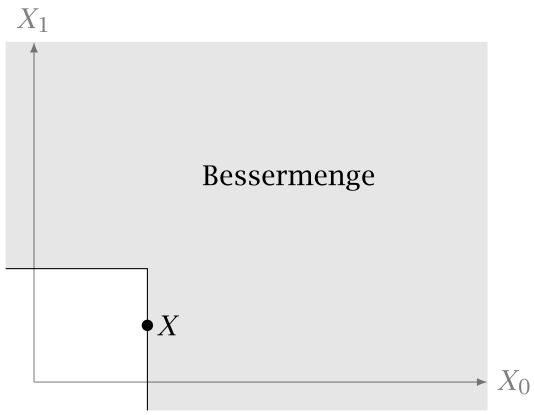


Abbildung 1: Bessermenge

Aufgabe 2 (8 Punkte)

Betrachten Sie einen Investor mit folgender Nutzenfunktion U:

$$U(x) = \ln 2x + 35$$

a) Berechnen Sie die Kennzahlen ARA und RRA für die Nutzenfunktion. (3 Punkte)

Lösung a):

$$
\begin{aligned}
U(x) &= \ln 2x + 35 \\
U^{'}(x) &= \frac{1}{x} \\
U^{''}(x) &= -x^{-2} \\
ARA &= -\frac{U^{''}(x)}{U^{'}(x)} = -\frac{-x^{-2}}{\frac{1}{x}} = x^{-1} \\
RRA &= x \cdot x^{-1} = 1
\end{aligned}
$$

b) Wie verändern sich beide Kennzahlen jeweils, wenn das Vermögen x steigt. (2 Punkte)

Lösung b):

$$
\begin{aligned}
ARA^{'} &= -x^{-2} < 0 \quad \text{die ARA sinkt, wenn das Vermögen steigt} \\
RRA^{'} &= 0 \quad \text{die RRA bleibt konstant, wenn das Vermögen steigt}
\end{aligned}
$$

c) Welche Konsequenzen hat das steigende Vermögen auf das Investitionsverhalten des Investors, wenn nur in ein risikoloses und in ein riskantes Wertpapier investiert werden kann? (3 Punkte)

Lösung c): Der Investor wird bei steigendem Vermögen weniger absolut risikoavers. Er investiert mehr an riskantes Wertpapier, genau so viel mehr bis der Anteil der riskanten Wertpapier im Portfolio den vorherigen Wert gerade erreicht.

Aufgabe 3 (14 Punkte)

Frau Müller betreibt einen Wurststand und möchte für ein eintägiges Sportfest Bratwürste einkaufen. Die Würste werden nur in 100er Packungen zu 80 € pro Packung verkauft, nicht angebrochene Packungen können nach dem Fest für 40 € zurückgegeben werden.

Der Stand verursacht 50 € Fixkosten am Verkaufstag, weiterhin fallen (zusätzlich) 0,10 € variable Kosten pro Bratwurst an. Der Verkaufspreis einer Bratwurst liegt bei 2,50 Euro. Mit einer Wahrscheinlichkeit von 30% kann Frau Müller 500 Bratwürste verkaufen, mit der Gegenwahrscheinlichkeit von 70% kann sie 600 Bratwürste verkaufen.

a) Kauft Frau Müller fünf oder sechs Packungen Bratwürste, wenn sie gemäß Bernoulli-Prinzip entscheidet mit der Erwartungsnutzenfunktion $U(X) = \sqrt{X}$, wobei X den Gewinn bezeichnet. (7 Punkte)

b) Kauft Frau Müller fünf oder sechs Packungen Bratwürste, wenn sie gemäß μ-σ-Prinzip entscheidet mit der Nutzenfunktion $V(X) = E[X] - \frac{1}{12}Var[X]$, wobei X den Gewinn bezeichnet. (7 Punkte)

Lösung Da die Würste nur pro Packung gekauft werden können, hat Frau Müller nur zwei Handlungsalternativen: Kauf von 5 Packungen oder von 6 Packungen.

1. Handlungsalternative: Kauf von 5 Packungen

	Absatzmenge 500	Absatzmenge 600
Wkt	0,3	0,7
Gewinn	$500 \cdot 2,5 - 5 \cdot 80 -$	$500 \cdot 2,5 - 5 \cdot 80 -$
	$-50 - 500 \cdot 0,1 = 750$	$-50 - 500 \cdot 0,1 = 750$
Nutzen	$\sqrt{750} = 27,386$	$\sqrt{750} = 27,386$
Erwartungsnutzen	**27,386**	
Erwartungswert	750	
Varianz	0	
V(X)	**750**	

2. Handlungsalternative: Kauf von 6 Packungen

	Absatzmenge 500	Absatzmenge 600
Wkt	0,3	0,7
Gewinn	$500 \cdot 2,5 - 6 \cdot 80 -$	$600 \cdot 2,5 - 6 \cdot 80 -$
	$-50 - 500 \cdot 0,1 + 40 = 710$	$-50 - 600 \cdot 0,1 = 910$
Nutzen	$\sqrt{710} = 26,6458$	$\sqrt{910} = 30,1662$
Erwartungsnutzen	$26,6458 \cdot 0,3 + 30,1662 \cdot 0,7 =$	**29,1108**
Erwartungswert	$710 \cdot 0,3 + 910 \cdot 0,7 =$	850
Varianz	$(710 - 850)^2 \cdot 0,3 + (910 - 850)^2 \cdot 0,7 =$	8400
V(X)	$850 - \frac{8400}{12} =$	**150**

Nach dem Bernoulli-Prinzip wird Frau Müller sich für das zweite Handlungsalternative entscheiden und 6 Packungen Würste kaufen; nach dem μ-σ-Prinzip wird sie dann 5 Packungen kaufen.

Aufgabe 4 (15 Punkte)

Ein Investor hat die Möglichkeit, sein Vermögen von 100 in einen risikolosen (Y^1) und zwei riskante und unkorrelierte (Y^2, Y^3) Titel zu investieren. Seine Nutzenfunktion ist $\mathrm{E}[X] - \frac{1}{2}\mathrm{Var}[X]$. Die Erwartungswerte aller Titel betragen 1, die Varianzen des ersten riskanten Titels Y^2 beträgt 2, die Varianz von Y^3 ist 3.

Berechnen Sie das nutzenoptimale Portfolio, wenn das risikolose Asset genau 1 und die riskanten Titel jeweils 0,6 kosten.

Lösung Das Maximierungsproblem lautet

$$\max_{p(X)=100} E[X] - \frac{1}{2}Var[X]$$

oder nach Einsetzen der Daten

$$\max_{x_1 \cdot 1 + x_2 \cdot 0{,}6 + x_3 \cdot 0{,}6 = 100} x_1 + x_2 + x_3 - \frac{1}{2}(x_2^2 \cdot 2 + x_3^2 \cdot 3).$$

Lagrange-Ansatz Die Lagrange-Funktion ist

$$\mathcal{L} = x_1 + x_2 + x_3 - x_2^2 - 1{,}5x_3^2 - \lambda(x_1 + 0{,}6x_2 + 0{,}6x_3 - 100)$$

und die ersten Ableitungen lauten

$$\begin{aligned}
0 &= \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_1} = 1 - \lambda \\
0 &= \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_2} = 1 - 2x_2 - 0{,}6\lambda \\
0 &= \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_3} = 1 - 3x_3 - 0{,}6\lambda \\
0 &= \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda} = x_1 + 0{,}6x_2 + 0{,}6x_3 - 100
\end{aligned}$$

Setzen wir $\lambda = 1$ ein, dann erhalten wir

$$\begin{aligned}
0{,}4 &= 2x_2 \\
0{,}4 &= 3x_3 \\
0 &= x_1 + 0{,}6x_2 + 0{,}6x_3 - 100
\end{aligned}$$

Dieses Gleichungssystem hat die Lösung

$$x_1 = 99{,}8, \quad x_2 = 0{,}2, \quad x_3 = \frac{2}{15}$$

Aufgabe 5 (15 Punkte)

Betrachten Sie zwei Wertpapiere, welche folgende (unsichere) Zahlungen generieren:

$$X = \begin{pmatrix} 1{,}5 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}, \qquad Y = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Das Wertpapier X zahlt also im ersten Zustand 1,5, im zweiten Zustand 3, im dritten Zustand 4 und das Wertpapier Y im ersten Zustand 2, im zweiten 4 und im dritten Zustand 1. Die Wahrscheinlichkeit für das Eintreten des ersten Zustandes sei 40%.

a) Geben Sie eine kurze Definition der Begriffe *First-order Stochastic Dominance* und *Second-order Stochastic Dominance*. (4 Punkte)

Lösung:

Seien zwei unsichere Zahlungen X und Y gegeben. Jeder Investor mit beliebiger, aber monotoner Erwartungsnutzenfunktion u, zieht X der Zahlung Y genau dann vor oder

$$E[u(X)] \geq E[u(Y)],$$

wenn für die Verteilungsfunktionen F_X und F_Y die Ungleichung

$$\forall t \qquad F_X(t) \leq F_Y(t)$$

erfüllt ist (so genannte FSD oder first order stochastic dominance).

Seien zwei unsichere Zahlungen X und Y gegeben. Jeder Investor mit beliebiger, aber monotoner und konkaver Erwartungsnutzenfunktion u, zieht X der unsicheren Zahlung Y genau dann vor

$$E[u(X)] \geq E[u(Y)],$$

wenn für die Verteilungsfunktionen F_X und F_Y die Ungleichung

$$\forall s \qquad \int_{-\infty}^{s} F_X(t)dt \leq \int_{-\infty}^{s} F_Y(t)dt$$

erfüllt ist (so genannte SSD oder "second order stochastic dominance").

b) Ermitteln Sie das Intervall für die Wahrscheinlichkeit des zweiten Zustandes, bei dem $X_{FSD} \succeq Y$ gilt. (5 Punkte)

Lösung:

$$X = \begin{array}{cc} & \text{Wkt.} \\ \begin{pmatrix} 1,5 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} & \begin{array}{c} 0,4 \\ q \\ 0,6-q \end{array} \end{array} \qquad Y = \begin{array}{cc} & \text{Wkt.} \\ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} & \begin{array}{c} 0,6-q \\ 0,4 \\ q \end{array} \end{array}$$

Damit $X_{FSD} \succeq Y$ gilt, muss folgende Ungleichung gelten:

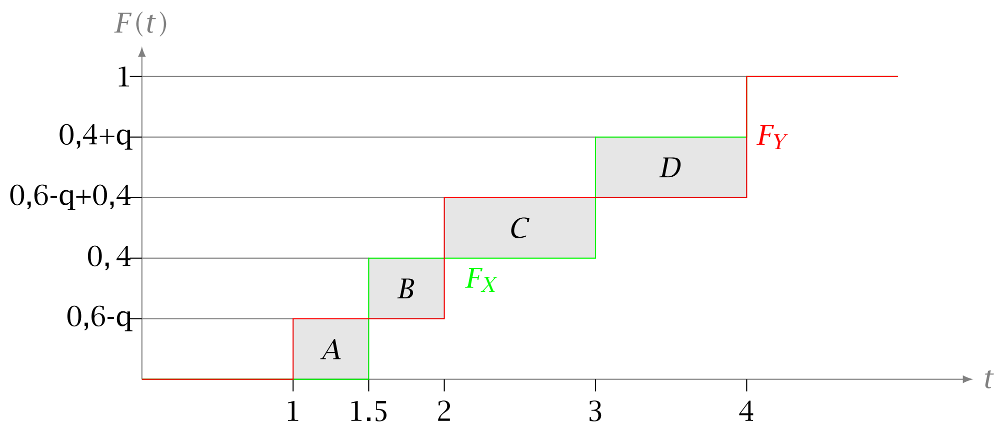
$$\forall t \qquad F_X(t) \leq F_Y(t)$$

$$\begin{aligned}
F_X(1) = 0, \quad F_Y(1) = 0,6 - q, \quad 0 \leq 0,6 - q \quad &\Rightarrow \quad q \leq 0,6 \\
F_X(1,5) = 0,4 + 0, \quad F_Y(1,5) = 0,6 - q, \quad 0,4 \leq 0,6 - q \quad &\Rightarrow \quad q \leq 0,2 \\
F_X(2) = 0,4, \quad F_Y(2) = 0,6 - q + 0,4, \quad 0,4 \leq 1 - q \quad &\Rightarrow \quad q \leq 0,6 \\
F_X(3) = 0,4 + q, \quad F_Y(3) = 0,6 - q + 0,4, \quad 0,4 + q \leq 1 - q \quad &\Rightarrow \quad q \leq 0,3
\end{aligned}$$

Zusammengefasst muss q im Intervall $[0, 0, 2]$ liegen.

c) Ermitteln Sie das Intervall für die Wahrscheinlichkeit des zweiten Zustandes, bei dem $X_{SSD} \succeq Y$ gilt. (6 Punkte)

grafische Lösung



Damit $X_{SSD} \succeq Y$ gilt, muss die Fläche A größer gleich B **und** die Fläche C größer gleich D sein.

$$
\begin{aligned}
A &= (0,6-q)\times(1,5-1) = 0,3-0,5q \\
B &= (0,4-(0,6-q))\times(2-1,5) = 0,5q-0,1 \\
A \geq B \quad &\Rightarrow \quad 0,3-0,5q \geq 0,5q-0,1, \quad \Rightarrow \quad q \leq 0,4 \\
C &= (1-q-0,4)\times(3-2) = 0,6-q \\
D &= (0,4+q-(1-q))\times(4-3) = 2q-0,6 \\
C \geq D \quad &\Rightarrow \quad 0,6-q \geq 2q-0,6, \quad \Rightarrow \quad q \leq 0,4
\end{aligned}
$$

Zusammengefasst muss q im Intervall $[0, 0,4]$ liegen.

numerische Lösung:

Damit $X_{SSD} \succeq Y$ gilt muss folgende Ungleichung gelten:

$$\forall s \qquad \int_{-\infty}^{s} F_Y(t)dt - \int_{-\infty}^{s} F_X(t)dt \geq 0.$$

Wir betrachten einen Punkt t^* (als Obergrenze des Integrals). Wir haben nun fünf Fälle zu unterscheiden.

Beginnen wir mit dem **ersten Fall** $t^* = 1$

$$\int_0^{t^*} F_Y(t)dt - \int_0^{t^*} F_X(t)dt = 0 - 0 = 0$$

Für den **zweiten Fall** $t^* = 1,5$ haben wir

$$
\begin{aligned}
\int_0^{t^*} F_Y(t)dt - \int_0^{t^*} F_X(t)dt &= (1,5-1)\cdot(0,6-q) - 0 \\
&= 0,3-0,5q \geq 0 \quad \Rightarrow \quad q \leq 0,6
\end{aligned}
$$

Für den **dritten Fall** $t^* = 2$ haben wir

$$
\begin{aligned}
\int_0^{t^*} F_Y(t)dt - \int_0^{t^*} F_X(t)dt &= (0,3-0,5q+(2-1,5)\cdot(0,6-q)) - (2-1,5)\cdot 0,4 \\
&= 0,4-q \geq 0 \quad \Rightarrow \quad q \leq 0,4
\end{aligned}
$$

Für den **vierten Fall** $t^* = 3$ haben wir

$$
\begin{aligned}
\int_0^{t^*} F_Y(t)dt - \int_0^{t^*} F_X(t)dt &= (0,6-q+(3-2)\cdot(0,6-q+0,4)) - (0,2+0,4) \\
&= 1-2q \geq 0 \quad \Rightarrow \quad q \leq 0,5
\end{aligned}
$$

Für den **fünften Fall** $t^* = 4$ haben wir

$$\begin{aligned}\int_0^{t^*} F_Y(t)dt - \int_0^{t^*} F_X(t)dt &= (1,6 - 2q + (4-3)\cdot(1-q)) - (0,6 + (4-3)\cdot(0,4+q)) \\ &= 1,6 - 4q \geq 0 \quad \Rightarrow \quad q \leq 0,4\end{aligned}$$

Zusammengefasst muss q im Intervall $[0, 0,4]$ liegen.