Fach: Finanzierung und Investition

Prüfer: Prof. Dr. Dr. A. Löffler

Veranstaltung: W2263 Entscheidungstheorie

Name	Musterlösung
Vorname	
Matrikelnummer	
Punkte	

Beachten Sie bitte folgende Hinweise:

1. Schreiben Sie bitte Ihre Lösung in die vorgegebenen Leerzeilen des Aufgabenblattes sowie, sollte der Platz nicht ausreichen, auf die leeren Rückseiten.
2. Rechnen Sie auf mindestens fünf genaue Ziffern (das sind nicht notwendigerweise fünf Nachkommastellen) im Endergebnis.[1]
3. Eine Aufgabe wird nur dann gewertet, wenn der Lösungsweg klar zu erkennen ist.
4. Klausuren, die unleserlich sind, werden nicht bewertet. Das gleiche gilt, wenn Sie mit Bleistift schreiben.
5. Nur nicht–programmierbare Taschenrechner sowie ein Wörterbuch ohne handschriftliche Einträge sind zugelassen.
6. Diese Klausur enthält inklusive dieses Deckblatts **11** Seiten.

Und nun **viel Erfolg ...**

[1] Ist das exakte Ergebnis beispielsweise 113.941,7234, dann bedeutet eine Genauigkeit auf fünf Ziffern 113.940.

Aufgabe 1 (10 Punkte)

Während der letzten Klausuren des Semesters überlegen Sie sich, welchen der folgenden Jobs Sie zum Ende des Monats ausführen möchten, um sich einen Kurzurlaub zu finanzieren.

i) Sie arbeiten als Aushilfe in einem Steuerbüro für 325 Euro.

ii) Sie arbeiten für einen Versicherungsagenten, der Sie erfolgsabhängig entlohnt. Sie erhalten eine Provision x, die von der Anzahl neu abgeschlossener Verträge abhängt. Die Wahrscheinlichkeitsverteilung der Provision ist in der folgenden Tabelle angegeben.

Provision x	Wahrscheinlichkeit
100	0,25
300	0,50
600	0,25

a) Ihre Präferenzen werden durch die Erwartungsnutzenfunktion $u(x) = -e^{-(\frac{x}{1.000})}$ beschrieben. Welchen Job werden Sie annehmen? *(5 Punkte)*

$$u(x_{Steuerbüro}) = -e^{-\frac{325}{1.000}} \approx -0,7225$$

$$E(u(x_{Versicherung})) = -\frac{1}{4}e^{-\frac{1}{10}} - \frac{1}{2}e^{-\frac{3}{10}} - \frac{1}{4}e^{-\frac{6}{10}} \approx -0,73382$$

AW: Sie nehmen den Job im Steuerbüro an.

<u>Bepunktung:</u> Idee Nutzenvergleich 1P
je Ergebnis 1,5P
(falls Rechenweg korrekt, aber Ergebnis falsch 1P)
Korrekte Antwort 1P
(auf Basis des jew. Ergebnisses)

b) Wie hoch müsste ceteris paribus die niedrigste mögliche Provision x (statt dem Betrag von 100) sein, damit Sie indifferent zwischen den beiden Jobs sind? *(5 Punkte)*

Bepunktung (positiv)

Indifferenz: $u(x_{Steuerbüro}) \overset{!}{=} E(u(x_{Versicherung}))$ 1,5P

$$\underbrace{-e^{-\frac{325}{1.000}}}_{\approx -0,72252} = -\frac{1}{4}e^{-\frac{x}{1.000}} \underbrace{-\frac{1}{2}e^{-\frac{3}{10}} - \frac{1}{4}e^{-\frac{6}{10}}}_{\approx -0,50671}$$ 1,5P

$$-0,2149 = -\frac{1}{4}e^{-\frac{x}{1.000}}$$

$$0,8597 = e^{-\frac{x}{1.000}}$$

$$-0,15122 = -\frac{x}{1.000}$$

$$151,22 = x$$

2P

Σ 5P

Bepunktung: Von der Maximalpunktzahl ausgehend je Rechen- oder Vorzeichenfehler -1P, jedoch minimal die Punktzahl bei positiver Bepunktung laut Rand.

Aufgabe 2 (13 Punkte)

a) Frau A entscheidet stets nach ihrer Erwartungsnutzenfunktion $u(x) = ln(x+1)$. Sie besitzt einen Ford Mondeo im Wert von 9.999 Euro. Die Wahrscheinlichkeit für einen selbstverschuldeten Totalschaden ihres Autos beträgt 2%. Welchen Betrag würde Frau A maximal für eine Vollkaskoversicherung zahlen, die sie gegen diesen Fall absichert *(4 Punkte)*?[2]

Bepunktung

$E(u(x_{\text{keine Versicherung}})) = u(x^*) \quad \text{mit} \quad x^* = (9.999 - \pi_{\text{Vers.}})$ 1,5P

$\underbrace{0,98 \cdot \ln(10.000)}_{=9,0261} + \underbrace{0,02 \cdot \ln(1)}_{=0} = \ln(10.000 - \pi_{\text{Vers.}})$ 1,5P

$e^{9,0261} = 10.000 - \pi_{\text{Vers.}}$

$1.682,36 = \pi_{\text{Vers.}}$ 1P

Σ 4P

b) Wie hoch ist die Markowitzprämie der Vollkaskoversicherung für Frau A *(4 Punkte)*?

$\pi_{\text{Markowitz}} = E(x) - x^*$ 1P

$E(x) = 0,98 \cdot 9.999 = 9.799,02$ 1P

$x^* = 9.999 - 1.682,36 = 8.316,64$ 1P

$\pi_{\text{Markowitz}} = 9.799,02 - 8.316,64 = 1.482,38$ 1P

Σ 4P

Alternativ ist eine Berechnung über die Formel $E(u(X)) = u(E(x) - \pi_M)$ möglich, $E(u(X_{\text{keine Vers.}}))$ wurde in Aufgabenteil a) bereits berechnet.

[2] Gehen Sie davon aus, dass nur zwei mögliche Zustände existieren: kein Schaden oder ein selbstverschuldeter Totalschaden. Die Vollkaskoversicherung ersetzt im selbstverschuldeten Schadensfalle lediglich den Wert des eigenen Automobils, alle weiteren Schäden ersetzt die obligatorische Haftpflichtversicherung.

Die jeweiligen Punkte werden auch gegeben, wenn die jeweiligen Rechenschritte nicht explizit notiert wurden.

c) Frau B besitzt einen VW Passat im Wert von 25.000 Euro. Sie wäre maximal bereit, 700 Euro für eine Vollkaskoversicherung zu bezahlen. Die entsprechende Markowitzprämie beträgt 450 Euro. Wie hoch ist ihre Wahrscheinlichkeit für einen selbstverschuldeten Totalschaden *(5 Punkte)*?

<u>Bepunktung</u>

$\pi_{Markowitz} = E(x) - x^* \Leftrightarrow E(x) = \pi_{Markowitz} + x^*$ 0,5P

$\pi_{Versicherung} = x_1 - x^* \Leftrightarrow x^* = x_1 - \pi_{Vers.}$ 1P

Daraus folgt

$E(x) = \pi_{Markowitz} + x_1 - \pi_{Versicherung}$ 1P

$= 450 + 25.000 - 700$

$= 24.750$ 0,5P

über die Berechnungsformel für den Erwartungswert

$E(x) = (1-p) \cdot 25.000 + p \cdot 0 \overset{!}{=} 24.750$ 1P

$(1-p) = \frac{24.750}{25.000}$

$p = 0{,}01 \mathrel{\hat{=}} 1\%$ 1P

Σ 5P

Die Punktzahl auf einzelne Schritte wird auch vergeben, wenn diese nicht explizit angegeben, sondern nur implizit richtig gerechnet werden.

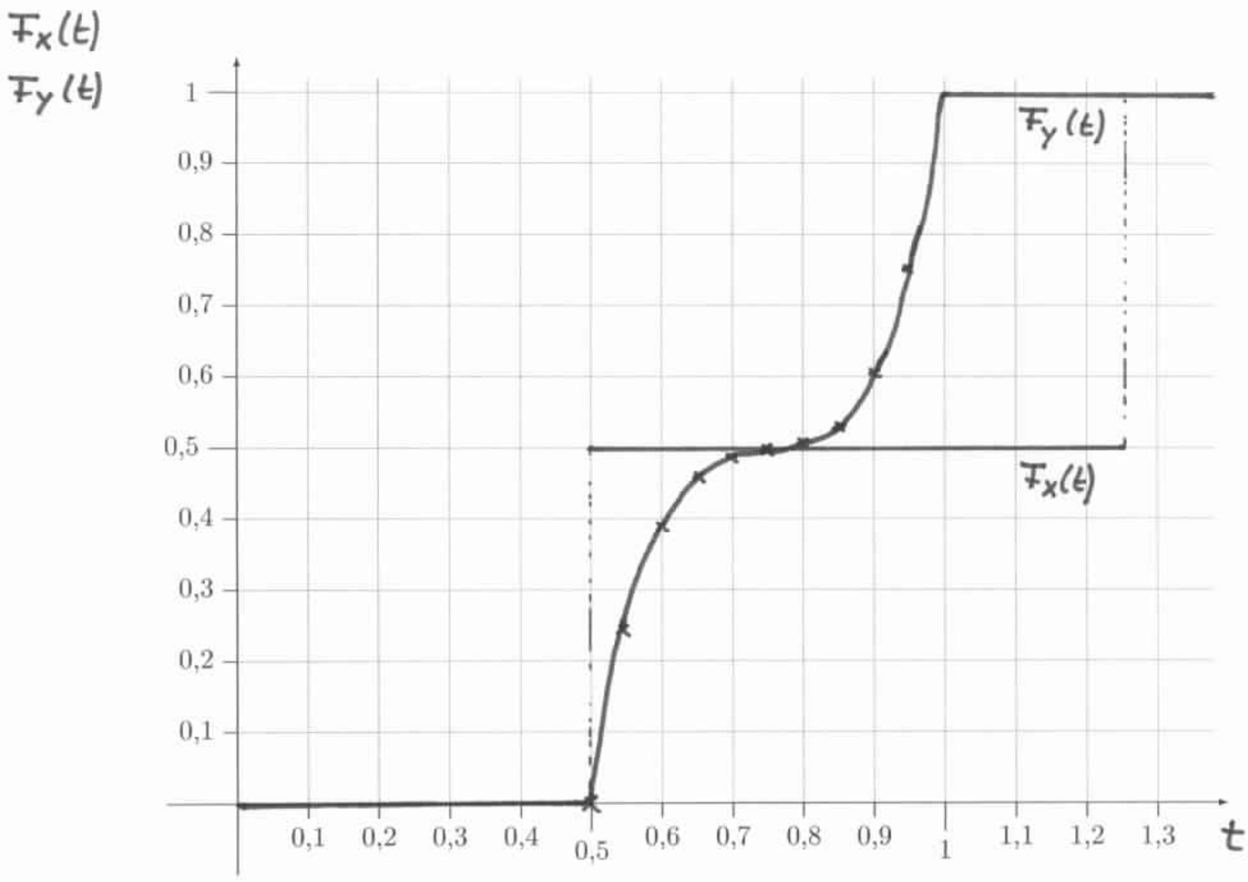
Aufgabe 3 (15 Punkte)

Zwei Wertpapiere X und Y zahlen in t=1 jeweils einen zufälligen Betrag $t \geq 0,5$. Dieser jeweilige Rückfluss besitzt die folgende Verteilungsfunktion:

Wertpapier X: $$F_X(t) = \begin{cases} 0 & \text{für } t < \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \text{für } \frac{1}{2} \leq t \leq \frac{5}{4} \\ 1 & \text{sonst} \end{cases}$$

Wertpapier Y: $$F_Y(t) = \begin{cases} 0 & \text{für } t < \frac{1}{2} \\ 32(t - \frac{3}{4})^3 + \frac{1}{2} & \text{für } \frac{1}{2} \leq t \leq 1 \\ 1 & \text{sonst.} \end{cases}$$

a) Skizzieren Sie die beiden Verteilungsfunktionen im folgenden Koordinatensystem und beschriften Sie die Achsen. *Hinweis: Zur Ermittlung von Funktionswerten eignet sich Ihr Taschenrechner (5 Punkte).*



Achsenbeschriftung 0,5P

$F_X(t)$ 1P

$F_Y(t)$ 3,5P

(Form getroffen: 2P, Schnittpunkt bei t=0,75 korrekt: 1P, saubere Ausführung (kein wildes Geschmiere: 0,5P)

b) Nennen Sie die allgemeinen Bedingungen für ein Vorliegen stochastischer Dominanz erster Ordnung (FSD) und zweiter Ordnung (SSD) *(2 Punkte)*.

FSD: $F_X(t) \leq F_Y(t) \quad \forall t \Rightarrow E(u(X)) \geq E(u(Y))$

SSD: $\int_{-\infty}^{s} F_X(t)dt \leq \int_{-\infty}^{s} F_Y(t)dt \quad \forall s \Rightarrow E(u(X)) \geq E(u(Y))$

je 1P

c) Prüfen und begründen Sie, ob im Fall der gegebenen Wertpapiere FSD und/oder SSD vorliegt. *Hinweis: Ihre Prüfung zur FSD muss nicht rechnerisch erfolgen, sondern kann allein auf Ihrer Zeichnung aus Aufgabenteil a) beruhen (8 Punkte).*

Bepunktung

FSD liegt nicht vor, wg. des Schnittpunkts von $F_X(t)$ und $F_Y(t)$. 1,5P

Prüfung auf SSD:

Für $\frac{1}{2} \leq t \leq 1$: $\int_{\frac{1}{2}}^{t} [32(t-\frac{3}{4})^3 + \frac{1}{2}]dt - \int_{\frac{1}{2}}^{t} \frac{1}{2}dt \leq 0$

Inklusive Angabe des Unterbereichs 2P (Falls obere Integralgrenze eins statt "t": nur 0,5P)

$$\int_{\frac{1}{2}}^{t} [32(t-\tfrac{3}{4})^3]dt + \underbrace{\int_{\frac{1}{2}}^{t} \tfrac{1}{2}dt - \int_{\frac{1}{2}}^{t} \tfrac{1}{2}dt}_{=0} \leq 0$$

$$8\left[(t-\tfrac{3}{4})^4\right]_{\frac{1}{2}}^{t} \leq 0$$

Für korrekte Stammfkt. 1,5P

$$8\left[(t-\tfrac{3}{4})^4 - (\tfrac{1}{2}-\tfrac{3}{4})^4\right] \leq 0$$

$$(t-\tfrac{3}{4})^4 \leq \tfrac{1}{256}$$

Nur Betrachtung eines Falls hier:

$$t-\tfrac{3}{4} \leq \tfrac{1}{4}$$

$$t \leq 1 \quad ✓$$

1P

Für $t=1$ sind die Flächen $\int_{-\infty}^{t} F_X(t)dt$ und $\int_{-\infty}^{t} F_Y(t)dt$ identisch groß.

Für $1 \leq t \leq \frac{5}{4}$ muss für ein Vorliegen von SSD daher gelten

$\int_{1}^{t} 1dt - \int_{1}^{t} \frac{1}{2}dt \leq 0$. Da dieses nicht der Fall ist, liegt keine SSD vor. 2P

Σ 8P

* Auch dann volle Bepunktung einzelner Schritte, wenn diese nur implizit richtig verwendet und nicht explizit angegeben wurden.

Aufgabe 4 (7 Punkte)

Auf einem vollkommenen Kapitalmarkt werden drei riskante Wertpapiere Y^2, Y^3 und Y^4 gehandelt. Die Kovarianzmatrix der Titel lautet

$$Cov = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & \frac{2}{3} & \frac{1}{2} \\ \frac{2}{3} & \frac{8}{3} & 1 \\ \frac{1}{2} & 1 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

Ermitteln Sie, mit welchen Wertpapiermengen x_3 und x_4 der redundante Titel Y^2 aus den Wertpapieren Y^3 und Y^4 nachgebaut werden kann.

Bepunktung*

Nachbau von Y^2: $Y^2 = x_3 Y^3 + x_4 Y^4$ 1P

$Cov(Y^2, Y^3) = Cov(x_3 Y^3 + x_4 Y^4, Y^3)$

$= x_3 Var(Y^3) + x_4 Cov(Y^3, Y^4)$ 1P

eingesetzt:

$\frac{2}{3} = \frac{8}{3} x_3 + x_4$ 1P

$\Leftrightarrow$ (I) $x_4 = \frac{2}{3} - \frac{8}{3} x_3$

$Cov(Y^2, Y^4) = Cov(x_3 Y^3 + x_4 Y^4, Y^4)$

$= x_3 Cov(Y^3, Y^4) + x_4 Var(Y^4)$ 1P

eingesetzt:

$\frac{1}{2} = x_3 + \frac{1}{2} x_4$ 1P

$\Leftrightarrow$ (II) $x_3 = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} x_4$

(II) in (I) $x_4 = \frac{2}{3} - \frac{8}{3}\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2} x_4\right)$

$-\frac{1}{3} x_4 = -\frac{2}{3}$

$x_4 = 2$ 1P

in (II) $x_3 = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cdot 2$

$= -\frac{1}{2}$ 1P

Aufgabe 5 (15 Punkte)

Ein Investor mit der Nutzenfunktion $U(x) = E(x) - \frac{3}{8} \cdot Var(x)$ und dem Budget p(X)=100 stellt in $t = 0$ sein Portfolio aus einem risikolosen Wertpapier Y^1 und zwei riskanten Wertpapieren Y^2, Y^3 mit den möglichen Rückflüssen

$$Y^2 = \begin{pmatrix} 4 \\ 8 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad Y^3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

zusammen. Die drei Zustände in $t = 1$ besitzen jeweils die gleiche Eintrittswahrscheinlichkeit. Die Rendite des sicheren Wertpapiers liegt stets bei $r(Y^1) = 0$. Der Preis des zweiten Basistitels beträgt $p(Y^2) = p$, der Preis des dritten Wertpapiers $p(Y^3) = 1$.

a) Berechnen Sie die Erwartungswerte, Varianzen und Kovarianzen der Rückflüsse der Basistitel. Stellen Sie anschließend das Entscheidungsproblem des Investors (Nutzenmaximierung unter einer Nebenbedingung) dar *(7,5 Punkte)*.

Bepunktung

$Y^1 = p_1$ (über $r(Y^1) = \frac{Y^1}{p_1} - 1 = 0$) 1P

$E(Y^2) = 4$

$E(Y^3) = 2$ je 0,5P

$Var(Y^2) = E[(Y^2)^2] - [E(Y^2)]^2 = \frac{80}{3} - 4^2 = \frac{32}{3}$

$Var(Y^3) = E[(Y^3)^2] - [E(Y^3)]^2 = \frac{20}{3} - 2^2 = \frac{8}{3}$ je 1P

$Cov(Y^2, Y^3) = E[Y^2 Y^3] - E(Y^2)E(Y^3) = \frac{32}{3} - 8 = \frac{8}{3}$

Entscheidungsproblem

Entweder

$$\max\ U(x) = \underbrace{p_1 x_1 + 4x_2 + 2x_3}_{E(x)} - \frac{3}{8}\underbrace{\left(\frac{32}{3}x_2^2 + \frac{8}{3}x_3^2 + 2 \cdot \frac{8}{3} x_2 x_3\right)}_{Var(x)}$$

u.d.B. $p_1 x_1 + p x_2 + x_3 \leq 100$ 2,5P

oder

$$\max\ \mathcal{L}(x) = p_1 x_1 + 4x_2 + 2x_3 - \frac{3}{8}\left(\frac{32}{3}x_2^2 + \frac{8}{3}x_3^2 + \frac{16}{3}x_2 x_3\right) - \lambda(p_1 x_1 + p x_2 + x_3 - 100)$$

Kein Punktabzug, wenn für p_1 ein konkreter Wert gewählt wurde.

b) Berechnen Sie die Wertpapiermengen x_1, x_2, x_3 des nutzenmaximierenden Portfolios in Abhängigkeit vom Preis p des zweiten Wertpapiers *(7,5 Punkte)*.

Erster Weg: Einsetzen der Budgetrestriktion in die Nutzenfunktion

Bepunktung

BR: $p_1 x_1 = 100 - p x_2 - x_3$

$U(x) = \underbrace{100 - p x_2 - x_3}_{p_1 x_1} + 4x_2 + 2x_3 - 4x_2^2 - x_3^2 - 2x_2 x_3$ 1P

$= (4-p)x_2 + x_3 + 100 - 4x_2^2 - x_3^2 - 2x_2 x_3$

(I) $\frac{\partial u}{\partial x_2} = (4-p) - 8x_2 - 2x_3 \overset{!}{=} 0$ 1P

(II) $\frac{\partial u}{\partial x_3} = 1 - 2x_3 - 2x_2 \overset{!}{=} 0$ 1P

ab hier gemeinsame Lösung mit Lagrange-Ansatz (S. 11)

aus (II): $x_2 = \frac{1}{2} - x_3$

in (I): $(4-p) - 4 + 8x_3 - 2x_3 = 0$

$x_3 = \frac{1}{6}p$ 1,5P

in (II) $x_2 = \frac{1}{2} - \frac{1}{6}p$ 1,5P

in der BR: $p_1 x_1 = 100 - p\underbrace{\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{6}p\right)}_{x_2} - \underbrace{\frac{1}{6}p}_{x_3}$

$p_1 x_1 = 100 - \frac{2}{3}p + \frac{1}{6}p^2$

$x_1 = \frac{100 - \frac{2}{3}p + \frac{1}{6}p^2}{p_1}$ 1,5P

Σ 7,5P

Schmierzettel

Bepunktung

Zweiter Weg: Lagrange Ansatz

$$\mathcal{L} = p_1x_1 + 4x_2 + 2x_3 - 4x_2^2 - x_3^2 - 2x_2x_3 - \lambda(p_1x_1 + p\,x_2 + x_3 - 100)$$

(I) $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_1} = p_1 - \lambda p_1 \stackrel{!}{=} 0$ d.h. $\lambda = 1$ — 1P

(II) $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_2} = 4 - 8x_2 - 2x_3 - \lambda p \stackrel{!}{=} 0$ — 1P

(III) $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_3} = 2 - 2x_3 - 2x_2 - \lambda \stackrel{!}{=} 0$ — 1P

(IV) $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda} = p_1x_1 + p\,x_2 + x_3 - 100 \stackrel{!}{=} 0$

Rest wie auf Seite 10 beschrieben.

Über $\lambda = 1$ aus Gleichung (I) ergeben sich direkt die Gleichungen (II) und (III) von Seite 10 und die dortigen Lösungswege.