Skript zur Vorlesung "Entscheidungstheorie"

Univ.–Prof. Dr. Dr. Andreas Löffler

letzte Änderung am 24. August 2009

Inhaltsverzeichnis

Definitionen, Annahmen, Sätze

Die Liste enthält eine Übersicht über die im Skript zu findenden Definitionen und Sätze:

1 Sicherheit

1.1 Das Grundmodell

Lernziel: Sie lernen die wichtigsten Begriffe aus dem Grundmodell der Entscheidungstheorie kennen: Wertpapier, Zahlungen des Wertpapiers. Wir erkennen, dass es zwei mögliche Interpretationen dieses Grundmodells gibt.

Wir wollen uns in dieser Vorlesung mit der Frage beschäftigen, wie sich Individuen in einer unsicheren Umwelt entscheiden sollten. Zur Beantwortung dieser Frage werden wir uns eines formalen Modells bedienen. Dabei werden wir uns die Arbeit zunächst erleichtern und die Unsicherheit ausblenden. Wir betrachten also eine Welt, in der beispielsweise Zahlungen oder Lieferungen von Gütern unter Sicherheit erfolgen.

Unser formales Vorgehen besitzt Vor- und Nachteile. Ein Nachteil besteht darin, dass ökonomische Sachverhalte auf eine auf den ersten Blick wenig intuitive Art und Weise dargestellt werden. Dem stehen zwei gewichtige Vorteile gegenüber. Erstens erlauben formale Modelle eine sehr präzise Diskussion von Sachverhalten, die bei rein qualitativen Debatten nicht möglich ist.[1] Zweitens erlaubt der hoher Abstraktionsgrad ökonomischer Modelle zumeist, dass sie ihre Aussagekraft in verschiedensten Situationen behalten. Immer wenn ihre allgemeinen, abstrakten Annahmen erfüllt sind, dann gelten auch sofort die im Modell bewiesenen Zusammenhänge und Sachverhalte.

[1] Formale Modelle erlauben beispielsweise Antworten auf Fragen wie "Um wie viel Prozentpunkte sinkt die Arbeitslosigkeit, wenn das Wirtschaftswachstum 2% beträgt?" Bei einer rein qualitativen Diskussion muss man bei der schwächeren Erkenntnis verbleiben, dass Wachstum sicherlich "irgendwie" die Arbeitslosigkeit beseitigen wird. Ein quantitativer Ökonom formuliert hier hilfreichere Aussagen.

In der Entscheidungstheorie werden wir es typischerweise mit *Portfolios* (auch *Verträge* oder *Wertpapiere*) zu tun haben, die Zahlungen versprechen. Diese Portfolios beschreiben wir formal durch einen Vektor reeller Zahlen: $X = (X_1, \ldots, X_S)$. Die Dimension des Vektors wird $S > 1$ sein. Diese Schreibweise hat den Vorteil, dass wir die Mathematik eines Vektorraumes nutzen können:

Zusammenlegen Wenn man zwei Portfolios X und Y zusammenlegt, dann weist das zusammengelegte Portfolio Zahlungen in Höhe von $X + Y$ auf.

Vervielfachen, Teilen Wenn man ein Portfolio X vervielfachen oder teilen will, dann wird dies durch die Multiplikation mit einer reellen Zahl $a \cdot X$ beschrieben. a kann auch negativ sein, in diesem Fall kommt es zu einem Leerverkauf des Portfolios.[2]

Vergleich Wir können die Zahlungen der Portfolios X und Y vergleichen. So gilt $X \geq Y$ genau dann, wenn für jedes $s = 1, \ldots, S$ auch $X_s \geq Y_s$ gilt[3]

[2] Bei einem Leerverkauf borgt man sich das Portfolio und verkauft es. Man muss es später zurückgeben und tut dies in der Hoffnung, dass dann der Preis gesunken sein wird. Auf Grund der grundgesetzlich geschützten Vertragsfreiheit können Leerverkäufe nicht verboten werden, es ist aber möglich, dass niemand bereit ist Ihnen einen Titel zu vernünftigen Konditionen zu borgen.

[3] An dieser Stelle gibt es eine Besonderheit, die man beachten muss. Wenn man reelle Zahlen vergleicht, so folgt aus den Bedingungen $x \geq y$ und $x \neq y$ sofort der Zusammenhang $x > y$. Diese Schlussfolgerung kann man nicht mehr ziehen, wenn es sich um Vektoren handelt, wie das Beispiel $X = (1,1)$ und $Y = (0,1)$ zeigt.

Im Folgenden werden wir zwei Ausprägungen dieses formalen Modells verwenden. Beide Situationen wollen wir jetzt beschreiben.

Verschiedene Güter in einem Zeitpunkt Stellen wir uns vor, dass Investoren in der Lage sind, S verschiedene (physische) Güter zu handeln. Ein Investor möchte nun das für ihn optimale Portfolio aus diesen Gütern wählen. Dabei finden die Bezahlung, die Lieferung und der Konsum der Güter im gleichen Zeitpunkt statt. Wir betrachten nur diesen einen Zeitpunkt und müssen ihn daher nicht näher bezeichnen.

Beispielsweise können wir darüber nachdenken, ob wir auf einem Grundstück Weizen oder besser Hirse anbauen. Abstrakt ist dies eine Entscheidung zwischen einer Investition in ein Gut X_1 ("Weizen") und ein Gut X_2 ("Hirse"). Der Vektor $X = (X_1, X_2)$ fasst die jeweiligen Mengen Weizen und Hirse in einem Symbol zusammen.

Das Wertpapier X ist jetzt wie folgt aufzufassen

$$X = \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \\ \vdots \\ X_S \end{pmatrix} \begin{array}{ll} \longleftarrow & \text{Menge an erstem Gut} \\ \longleftarrow & \text{Menge an zweitem Gut} \\ & \qquad \vdots \\ \longleftarrow & \text{Menge an } S\text{–tem Gut} \end{array}$$

Der Preis eines Vertrages X wird in der Literatur verschieden bezeichnet: Wir werden hier $p(X)$ schreiben.

Gleiches Gut in mehreren Zeitpunkten Betrachten wir jetzt eine Situation, in der ein Investor es nur mit einem Gut zu tun hat. Dabei wird es sich sinnvollerweise um Geld handeln. Der Investor steht vor dem Problem, wie er diese Geldmenge möglichst effizient anlegen kann. Er hat dabei die Möglichkeit, einen Geldbetrag über ein, zwei bis hin zu S Perioden zu investieren.

Ein Wertpapier ist für den Investor jetzt ein Vertrag, der ihm gewisse Zahlungen in den zukünftigen S Perioden garantiert. Auch diese Situation können wir durch Vektoren beschreiben. Zu diesem Zweck unterscheiden wir eine Gegenwart ("heute") und S zukünftige Zeitpunkte. Verträge werden heute abgeschlossen, geliefert wird immer in der Zukunft. Die Einträge im Vektor sind jetzt wie folgt zu interpretieren:

$$X = \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \\ \vdots \\ X_S \end{pmatrix} \begin{array}{ll} \longleftarrow & \text{Menge an Geld in } t = 1 \\ \longleftarrow & \text{Menge an Geld in } t = 2 \\ & \qquad \vdots \\ \longleftarrow & \text{Menge an Geld in } t = S \end{array}$$

Da wir hier verschiedene Zeitpunkte unterscheiden, kann man (risikolose) Zinssätze bestimmen. Es gibt sogar je nach Laufzeit verschiedene Zinssätze (Kassa– und Terminzinssätze), auf die wir in der Arbitragetheorie eingehen.

Den Preis eines Wertpapiers X werden wir kürzer durch den Ausdruck X_0 beschreiben, bei dem der Vektor gewissermaßen um eine Zeile verlängert wird. Diese Schreibweise ist sinnvoll, wenn wir die Bezahlung bei Vertragsabschluss (also im Zeitpunkt $t = 0$) auch als eine "Lieferung" interpretieren. Wenn der Zinssatz zeitlich konstant ist, so bezeichnen wir ihn mit r_f.

Bevor wir mit der Darstellung der theoretischen Zusammenhänge beginnen, noch eine Anmerkung: In der Wirklichkeit sind die Dinge komplizierter, dort finden wir oft Entscheidungssituationen, in denen mehrere Güter *und* mehrere Zeitpunkte involviert sind. Es ist auf den ersten Blick nicht klar, wie dies in unserem Modell berücksichtigt werden kann. Auf diese Fragen werden wir erst in fortgeschrittenen Veranstaltungen eingehen können.

1.2 Samuelsons Theorie der offenbarten Präferenz

Lernziel: Ziel der Theorie der offenbarten Präferenz ist es, aus bestimmten Verhaltensannahmen auf Präferenzen der Investoren zu schließen. Wir identifizieren diese Verhaltensannahmen und beschreiben ein Experiment, in dem diese geprüft wurden.

Am Beispiel des Fisher–Modells aus der Assessmentvorlesung "Investition" sahen wir, wie ein Investor oder sonstiger Entscheidungsträger den Nutzen eines Portfolios ermittelt und daraus sein optimales Portfolio bestimmt. Existieren die dort unterstellten Nutzenfunktion tatsächlich? Welche Eigenschaft müssen Sie besitzen, damit man mit Ihnen rechnen kann? Kann man sie für konkrete Investoren bestimmen? In der Ökonomie gibt es zwei Theorien, die diese Fragen beantworten. Der erste Zugang, die Theorie der offenbarten Präferenz, wird oft nur in der Volkswirtschaftslehre vermittelt, während wir den zweiten Zugang, die Präferenztheorie, eher in der Betriebswirtschaftslehre finden.

Der Ökonom Paul Samuelson hat als erster erkannt, dass die Frage, ob jeder Investor Nutzenfunktionen besitzt, eine wichtige Bedeutung zukommt und sie beantwortet werden muss. Er beschrieb die Situation in der Nutzentheorie Mitte der dreißiger Jahre wie folgt:

> "Prior to the mid–1930's utility theory showed signs of degenerating into a sterile tautology. Psychic utility as satisfaction could scarcely be defined, let alone be measured. Austrian economics would insist that people acted to maximize their utility, but when challenged as to what that was, they found themselves replying circularily that however people behaved, they would presumably not have done so unless it maximizes their satisfaction. . . "[4]

[4] Samuelson, P.A.: *Maximum Principles in Analytical Economics*. Les Prix Nobel en 1970, Stockholm, The Nobel Foundation (reprinted in: *The Collected Scientific Papers of Paul A. Samuelson*, edited by Robert C. Merton, MIT Press, 1972, chapter 130), S. 280.

Samuelson konnte das von ihm beschriebene Problem durch seine Theorie der offenbarten Präferenz lösen. Er akzeptiert, dass Personen an Märkten handeln und stellte dann die Frage, wie sich ein Entscheidungsträger *unter Marktbedingungen* verhalten muss, damit er wie ein Nutzenmaximierer beschrieben werden kann.

Samuelson unterstellt Preise von Wertpapieren p und ein (nominales) Vermögen w. Dann erklärt der Investor, welches (von Preisen und Vermögen abhängiges "optimales") Portfolio $X(p,w)$ er wählt. Samuelson erläutert nicht weiter, weshalb dieses Portfolio optimal ist. Es handelt sich nur um ein Portfolio, das der Investor als für ihn bestens geeignet bezeichnet. Im nächsten Schritt verändert Samuelson Preise p und Vermögen w und erhält so nach und nach einen vollständigen Funktionsverlauf $X(p,w)$. Da der Investor seine Auswahl mitteilt, offenbart er eine Reihe von Informationen über seine der Entscheidung eventuell zugrunde liegende Nutzenfunktion.

Aus historischen Gründen werden wir diese Idee in einem Zwei–Zeitpunkt–Fall veranschaulichen.[5] In diesem Fall können wir die Situation in einer zweidimensionale Grafik darstellen. Betrachten Sie dazu die Abbildung 1. Sie finden auf den Achsen die Gütermengen X_1 sowie X_2. Ein Portfolio X entspricht dann genau einem Punkt in der Ebene $X = (X_1,X_2)$.

[5] Samuelson ("A Note on the Pure Theory of Consumer Behavior," *Economica*, **5** 1938, 61–71) hat das Problem nur für den zweidimensionalen Fall lösen können. Erst mit Houthakker ("Revealed Preference and the Utility Function", *Economica* **17** 1950, S. 159–174) wurde der mehrdimensionale Fall geklärt.

Wir unterstellen nun, dass der Investor zwei voneinander verschiedene Situationen miteinander vergleicht. In jeder dieser beiden Situationen steht ihm ein anderes Vermögen zur Verfügung; in der einen (ersten) Situation besitzt er w^1, in der zweiten Situation steht ihm w^2 zur Verfügung.

Die beiden Situationen unterscheiden sich aber nicht nur durch die Einkünfte, die der Investor besitzt. Auch die Preise, die die Güter X_1 sowie X_2 haben, unterscheiden sich. Wir wollen in die Grafik alle diejenigen Portfolios einzeichnen, die sich der Investor beim Preissystem p und dem Einkommen w leisten kann. Diese Portfolios werden durch die Budgetrestriktion des Investors festgelegt. Eine solche Budgetrestriktion ist durch eine Geradengleichung beschrieben. Wenn wir also die Preise p und das Einkommen w festhalten, so liegen alle erreichbaren (käuflich erwerblichen) Portfolios auf einer Geraden in der X_1-X_2-Ebene. Diese Gerade nennen wir Transaktionsgerade. Auf dieser Transaktionsgeraden bzw. Budgetlinie wird dann unser Investor sein "bestes" Portfolio wählen.

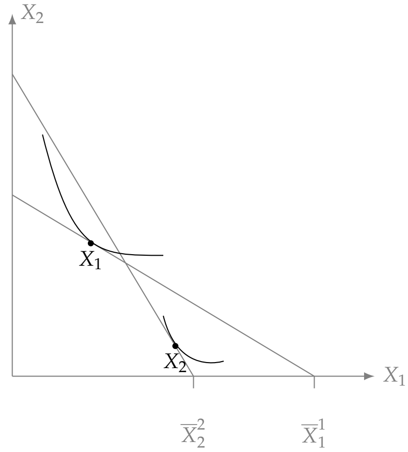
Da wir zwei verschiedene Preisvektoren p und zwei verschiedene Einkommen betrachten, werden wir zwei verschiedene Transaktionsgeraden in die Grafik einzeichnen. Wären die Preise gleich groß, dann wären die beiden Geraden parallel – weil wir aber davon ausgehen wollen, dass sich die Güterpreise unterscheiden, werden die Transaktionsgeraden (wie eingezeichnet) einen gemeinsamen Schnittpunkt aufweisen.

Unser Investor wird nun aufgefordert, zu jeder Transaktionsgerade sein bevorzugtes Portfolio auswählen. Ob er sich dabei einer Nutzenfunktion bedient oder eine andere Regel anwendet, können wir noch nicht beobachten. Durch diese Wahl offenbart er aber seine Präferenz.

Samuelson konzentriert sich nun auf eine Situation wie die, die wir in Abbildung 1 beobachten können. Angenommen, die Auswahl der besten Portfolios unseres Investors sei gerade so erfolgt, wie wir sie in der Grafik erkennen: Die beiden Portfolios liegen links vom und unterhalb des Schnittpunktes beider Transaktionsgeraden. Dann stellen wir die Frage, ob ein Investor sich so verhält, als würde er eine Nutzenfunktion maximieren.

Gehen wir zuerst von einer positiven Antwort auf die Frage aus. Wenn unser Entscheidungsträger tatsächlich eine Nutzenfunktion hätte, dann müssten wir in der Lage sein, entsprechende Indifferenzkurven einzutragen. Diese Indifferenzkurven müssen tangential an den Schnittpunkten liegen. Die Grafik zeigt uns aber, dass sich denkbare oder mögliche Indifferenzkurven schneiden werden – das aber darf nicht sein, weil verschiedene Indifferenzkurven unterschiedliche Nutzenniveaus repräsentieren. Indifferenzkurven dürfen sich nie schneiden. Damit haben wir einen Widerspruch und wir erkennen, dass unser Investor sich nicht so verhält, als würde er einen Nutzenfunktion maximieren.

Abbildung 1: Das Axiom der offenbarten Präferenz im Samuelson–Modell



Samuelson nannte die von ihm entdeckte Eigenschaft von Nachfragen oder optimalen Portfolios das Axiom der offenbarten Präferenz.[6]

Axiom der offenbarten Präferenz Ein rationaler Entscheidungsträger wählt niemals seine "besten" Portfolios dergestalt, dass eine Situation wie in Abbildung 1 eintritt.

[6] Samuelson hat mehrfach recht eindrucksvoll beschrieben, wie er dieses Axiom entdeckte: "To make the long story short, the flash of inspiration for 'Revealed Preference' came to me in argument with one of my teachers, as many of my best ideas have done. Having learned about indifference curves from Leontieff, I put them to use next year in Haberler's international trade course. When he objected to my postulating convex indifference curves, I heard myself replying: 'Well, if they are concave, then the Laspeyres–Paasche index–numbers of your doctoral theses are no good'. . . All that remained was to work out the details of the theory of revealed preference." Samuelson (1970, a.a.O.), S. 281.

Die von uns gewählte Formulierung des Axioms der offenbarten Präferenz ist sehr vage und wenig formal. Wir werden dieses Axiom aber hier nicht formal präzise darstellen, weil die Darstellung zu aufwendig ist. Wir stellen nur fest, dass aus dem Axiom der offenbarten Präferenz die Existenz einer Nutzenfunktion beweisbar ist. Wichtig ist für uns, dass es sich bei dem Axiom der offenbarten Präferenz um eine empirisch nachprüfbare Annahme handelt (ganz im Gegensatz zu der Existenz einer Präferenzrelation, die uns im nächsten Abschnitt begegnen wird):

Satz der offenbarten Präferenz Wenn ein Entscheidungsträger das Axiom der offenbarten Präferenz erfüllt, dann existiert eine Nutzenfunktion dergestalt, dass die optimalen Portfolios des Investors immer Ergebnis des dazugehörigen Maximierungsproblems sind.

In der Theorie der offenbarten Präferenzen werden also Nutzenfunktionen durch Verhaltensannahmen der Investoren beschrieben. Wenn Entscheidungsträger die Anforderungen der Theorie der offenbarten Präferenz erfüllen, dann verhalten sie sich, *als ob* sie Nutzenfunktionen maximieren. Inwieweit ihnen das formale Grundmodell des eigenen Handelns bewusst ist, spielt keine Rolle.

Eine solche Formulierung der Nutzentheorie hat den Vorteil, dass sie experimentell überprüft werden kann. Dies ist 1993 durch die Arbeit von Sippel im Labor von Reinhard Selten geschehen.[7] Er gestaltet das Experiment wie folgt. Die Versuchsperson verbringt eine feste, ihr bekannte Zeit im Labor. Dort gibt es außer dem Konsum der vorher vom Experimentleiter gekauften Güter keine andere mögliche Beschäftigung. Die verbleibende Zeit muss außerdem ausreichend lang sein, damit die Kosten einer nicht den wahren Präferenzen entsprechenden Zeitgestaltung entsprechend hoch sind.[8] Insbesondere muss die Alternative "Nichtstun über den gesamten Zeitraum" ausreichend unangenehm sein, damit die angebotenen Güter auch erwünscht sind: Sippel wählte als Zeitdauer eine Zeitstunde. Im Experiment wurden acht Güter angeboten, von denen drei in Minuten gemessen wurden und die übrigen mit einer Briefwaage (kleinste Einheit: Gramm) abgewogen wurden. Im einzelnen handelte es sich um die folgenden Güter:

[7] Siehe Sippel, R.: "An Experiment on the Pure Theory of Consumer's Behavior", *The Economic Journal*, **107** 1997, 1431–1444.

[8] So waren zum Beispiel weder Rauchen noch Gespräche mit dem ständig anwesenden Experimentleiter erlaubt.

Videos: Ein insgesamt 180–minütiges Videoband, das mit damals aktuellen Videoclips aus der Rock– und Popmusik bespielt war. Die Teilnehmer erhielten eine Liste, aus der der Inhalt des Bandes in chronologischer Reihenfolge zu ersehen war. Kaufte man dieses Gut, so konnte man sich während der gekauften Zeit beliebig mit dem Band beschäftigen, d.h. einzelne Clips betrachten, vor– und zurückspulen etc. Umspulzeiten gingen zu Lasten der gekauften Zeit.

Computerspiele: Das Shareware–Spiel "Super–Blast", ein Geschicklichkeitsspiel mit 18 levels, bei dem man mit einem Ball Steine aus einer Mauer herausbricht. Es lief auf einem (zur damaligen Zeit neuwertigen) IBM–PC. Während der gekauften Zeit war ein Wechsel zwischen verschiedenen Modi möglich.

Magazine: Eine Auswahl von Zeitungen und Zeitschriften, mit deren Lektüre man sich beschäftigen konnte. Die jeweils aktuellen Ausgaben von Spiegel, *Titanic*, *Max* und Zeit sowie Zeit–Magazin lagen aus. Gekauft wurde eine bestimmte Zeit zur Beschäftigung mit diesen Magazinen.

Coca–Cola™: Die gekaufte Menge des gekühlten Erfrischungsgetränks wurde grammgenau in einem Becher abgewogen.

Orangensaft: "Dittmeyers Valensina" war ebenfalls gekühlt vorrätig und wurde grammgenau ausgegeben.

Kaffee: Die gewünschte Menge an Bohnenkaffee wurde jeweils frisch zubereitet. Milch und Zucker standen nach Belieben des Konsumenten zur Verfügung.

Haribo: Die Haribo–Mischung *Color–Rado* mit Lakritz, Gummibärchen etc. Die Versuchspersonen konnten sich daraus auf Wunsch die bevorzugten Stücke heraussuchen und auswiegen lassen.

Knabbern: Gesalzene Erdnüsse, Salzstangen und Knabbergebäck konnten beliebig kombiniert werden und wurden auf einem Teller ausgewogen.

Die Versuchspersonen waren beim Kauf der Güter nicht auf volle Minuten oder Gramm beschränkt, sondern konnten auch beliebige Bruchteile davon wählen. Die Versuchspersonen wurden mit zehn verschiedenen Preis–Einkommen–Situationen konfrontiert, aus denen sie sich jeweils das von ihnen gewünschte Güterbündel auswählen mussten. So lagen Sippel zehn Transaktionsgeraden mit entsprechend vielen optimalen Portfolios vor. und Die Preise wurden in abstrakten Geldeinheiten angegeben, siehe Abbildung 1 (für die ersten sechs Güter sind die Preise je Gramm, für die verbleibenden Güter Preise je Minute angegeben). Die Preise wurden so gewählt, dass keine Ähnlichkeit zu (tatsächlichen) Preisen in DM bestand. Sippel hat das Experiment zweimal durchgeführt, und in beiden Experimenten verschiedene Preisrelationen verwandt. Im ersten Experiment wurden die Relationen gewählt, die in Abbildung 1 wiedergegeben sind.

Tabelle 1: Budgets und Preise verschiedener Güter in Sippels Experiment

Gut \ Situat.	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Kaffee	2,00	1,25	1,20	3,00	1,50	5,00	2,30	1,20	4,50	2,00
Cola	1,00	2,50	1,60	2,00	7,50	3,00	1,15	3,00	2,25	1,60
Orangensaft	1,50	2,00	1,25	2,40	2,50	1,65	1,725	1,50	2,00	2,50
Knabbern	1,60	0,75	1,00	1,80	5,00	2,40	1,84	1,80	3,60	4,00
Haribo	2,00	1,00	4,00	2,00	3,75	4,80	2,30	1,00	1,35	3,2
Magazine	64,0	50,0	40,0	48,0	50,0	60,0	73,6	50,0	50,0	100,0
Videos	36,0	40,0	50,0	80,0	60,0	55,0	41,4	36,0	90,0	80,0
Computersp.	50,0	25,0	32,0	40,0	75,0	120,0	57,5	40,0	60,0	64,0
Budget	2.000	1.500	1.600	2.400	3.000	3.300	2.300	1.800	2.700	3.200

Im diesem Experiment wurden typischerweise für vier Güter die realen Preise erhöht und für 4 Güter gesenkt, in einigen Fällen blieben die Güter real gleich teuer.[9] Bei der Festlegung der Preise spielte weiter eine wichtige Rolle, dass die Budgetrestriktion wirksam wurde: die Güter "Videos", "Computerspiele" und "Magazine" waren niemals so billig, dass man sich mehr als eine Stunde von ihnen hätte leisten können. Die Preise schwankten nur in einem gewissen Rahmen: die Güter, die in Minuten gemessen wurden, waren niemals so prohibitiv teuer, dass ein realistischer Konsum (5–10 Minuten) das ganze Budget erschöpft hätte. Andererseits waren die zu verzehrenden Güter niemals so billig, dass die mögliche Konsummenge in Bereiche der Übersättigung vorstößt.

[9] In zwei Situationen (Nr. 1 und Nr. 7) blieben die realen Preise gleich – damit wurde versucht, die sogenannte Homogenitätsforderung zu überprüfen. Die Theorie der offenbarten Präferenz verlangt nämlich, dass bei einer gleichmäßigen Änderung aller Preise und Vermögen der Investor das optimale Portfolio nicht ändert. Der einzige Unterschied zwischen Nr. 7 und Nr. 1 bestand daher darin, dass alle Preise und der zur Verfügung stehende Geldbetrag um 15% höher waren. Beim zweiten von Sippel durchgeführten Experiment fehlt dieser Homogenitätstest.

Um eine möglichst simultane Entscheidung über verschiedene Preis–Einkommen–Situationen zu erreichen, wurde die Versuchsperson zu Beginn des Experiments mit den verschiedenen Budgetmengen konfrontiert. Die Auswahl des optimalen Güterbündels geschah in dem Wissen, dass eine dieser Situationen nach beendeter Entscheidung zufällig ausgewählt wird, alle übrigen Entscheidungen hatten keine Folgen. Die Versuchsperson konnte in der Wahlphase jede Preis–Einkommen–Situation neu verändern; die optimalen Güterbündel wurden somit an einem Zeitpunkt gewählt. Damit vermeidet Sippel das Problem sich zeitlich ändernder Präferenzen: würde er die zehn Preis–Einkommen–Situationen nacheinander erfragen, könnten sich die Vorlieben der Versuchsperson geändert haben.

An den von Sippel durchgeführten Experimenten nahmen einmal 12 und einmal 30 Versuchspersonen teil; die meisten waren Jura– oder VWL–Studenten. Es fand pro Person ein Einzelexperiment statt, das jeweils ca. zwei Stunden dauerte. Für die vollständige Teilnahme an dem Experiment erhielt jede Versuchsperson einen pauschalen Betrag von 25 DM. Der "Kauf" der Güter ging so vor sich, dass die Versuchsperson nacheinander 10 Bestellscheine ausfüllte, auf denen die angebotenen Güter mit ihren jeweils aktuellen Preisen und das zur Verfügung stehende Budget aufgeführt waren.

Die Versuchsperson musste eintragen, welche Mengen von welchen Gütern sie in dieser Situation zu kaufen wünschte, und dabei natürlich beachten, dass die Kosten dieses Bündels ihr Budget nicht überstiegen. Der notwendige Rechenaufwand bei der Auswahl der Güter wurde mit einem Excel–Spreadsheet sehr vereinfacht, um so die Entscheidungskosten niedrig zu halten. Die Versuchsperson brauchte nur die einzelnen Mengen einzutippen, und das Programm errechnete sofort die Kosten dieser Menge und die Gesamtkosten des Güterbündels. Wurde das Budget überschritten, so erschien eine entsprechende Meldung auf dem Bildschirm. Der Computerbestellschein enthielt gegenüber dem Bestellschein auf Papier noch eine zusätzliche Spalte mit der Angabe, welche Menge man zum vollständigen Ausschöpfen des Budgets bestellen musste. Diese Angabe diente dazu, ein längeres Suchen der exakt die Budgetidentität erfüllenden Menge zu ersparen. Die Spalte wurde allerdings erst aktiviert, wenn die Gesamtausgaben für die Güter nah genug am zur Verfügung stehenden Betrag waren ($\pm 5\%$), sie war nur zur Feinabstimmung gedacht – die Versuchspersonen wurden ja nicht explizit aufgefordert, die Budgetidentität zu erfüllen.

Nachdem sich die Versuchsperson mit Hilfe des Computers für ein Güterbündel entschieden hatte, wurde die Auswahl in den eigentlichen Bestellschein aus Papier übertragen. Ein einmal ausgefüllter Bestellschein konnte beliebig oft wieder abgeändert und die Eintragungen auf den verschiedenen Bestellscheinen miteinander verglichen werden. Für den gesamten Entscheidungsprozess bestand kein Zeitlimit. Erst wenn die Versuchsperson keine Änderung mehr vornahm, wurde eine der 10 Situationen ausgelost. Dies geschah mit einem bingo cage, ein Gerät, wie es zur Ziehung von Lottozahlen verwendet wird: es enthielt Kugeln von 1 bis 10, und die gezogene Nummer determinierte die ausgespielte Situation.

Danach begann der zweite Teil des Experiments; er dauerte eine Stunde. In einer von der Versuchsperson bestimmten Reihenfolge konnten die bestellten Güter verbraucht werden; ein Zwang zum Konsum bestand nicht. Mit Ablauf der 60 Minuten war das Experiment beendet, und die Versuchsperson erhielt ihr pauschales Honorar.

Sippel erhielt so eine Vielzahl von Daten über Nachfragen der Versuchspersonen. Diese Daten nutzte er, um die Theorie von Samuelson zu überprüfen. Dabei kam er hinsichtlich der Frage, ob menschlichen Entscheidungen Nutzenfunktionen zugrunde liegen, zu folgenden Ergebnissen. Die Mehrzahl der Versuchspersonen machte von der Möglichkeit Gebrauch, einmal getroffene Entscheidungen zu korrigieren. In aller Regel betraf dies die zuerst ausgefüllten Bestellbögen 1 und 2. Dieses Verhalten deutet darauf hin, dass die Entscheidungen in der Tat simultan getroffen wurden. Bei der Budgetrestriktion wurde meist deutlich weniger als eine Geldeinheit verschenkt, ein Gegenwert von einem Bruchteil einer Minute bzw. maximal einem Gramm Nahrungsmittel. Bedenkt man die realen Konsequenzen, so kann daher davon ausgegangen werden, dass die Versuchspersonen ihr Budget voll ausschöpfen.

Das Ergebnis der Experimente offenbart, dass im ersten Experiment 11 von 12 und im zweiten Experiment 22 von 30 Versuchspersonen gegen das Axiom der offenbarten Präferenz verstoßen. Auf den ersten Blick wirkt dieses Ergebnis ernüchternd. Es zeigte sich jedoch in späteren Untersuchungen, dass hierfür eine Verletzung der Homogenitätsforderung verantwortlich war. Die Versuchspersonen "erkannten" nicht, dass die Situationen Nr. 1 und 7 bis auf einen Faktor in Preisen und Einkommen identisch waren: In Situation 7 waren gegenüber der Situation 1 die Preise und Einkommen jeweils gleichmäßig um 25% angehoben worden. Entfernt man diese besondere Situation aus den Beobachtungsergebnisse, die vermutlich keine einzige Versuchperson erkannt hatte, und prüft die Daten erneut, dann sieht das Bild ganz anders aus – jetzt wird die Nutzentheorie im Grunde eher bestätigt! Wer also auf Grund des Sippel-Experiments die gesamte Nutzentheorie ablehnt, schüttet das Kind mit dem Bade aus.

1.3 Präferenzrelationen

Lernziel: Bisher haben wir Nutzenfunktionen, aus beobachtbarem Verhalten abgeleitet. Jetzt wollen wir sie aus Präferenzaxiomen herleiten.

Wir werden jetzt einen weiteren Weg kennen lernen, mit dem Nutzenfunktionen eingeführt werden können. Wir werden dazu ein Axiomensystem an *Präferenzen* formulieren. Präferenzen sind "besser als"–Aussagen: Sie beziehen sich immer auf zwei konkrete Portfolios X und Y und besagen, dass ein Investor X besser als Y findet. Dabei spielen (im Gegensatz zur offenbarten Präferenz) weder Preise noch Einkommen eine Rolle.

Präferenzrelation beschreiben die Präferenzen von Individuen durch Symbole, z.B. $X \succ Y$ für die Aussage "X ist besser als Y". Wenn auch der Fall, dass X und Y gleichpräferiert sind ($X \sim Y$) mit in die vorherige Aussage aufgenommen wird, so erhält man die Aussage "X ist besser oder mindestens ebenso gut wie Y" und verwendet das Symbol $X \succeq Y$.

Welche Eigenschaften müssen die Präferenzrelationen eines Investors besitzen, um daraus schlussfolgern zu können, dass dieser sich so verhält, als maximiere er eine Nutzenfunktion?

Vergleichbarkeit es gilt $X \succeq Y$ oder $Y \succeq X$.[10]

Transitivität Wenn $X \succeq Y$ und $Y \succeq Z$ gilt, dann ist auch $X \succeq Z$.

Stetigkeit Die Relation ändert sich nicht, wenn ein Grenzübergang im Unendlichen erfolgt. Aus $X^n \preceq X$ folgt also $\lim_{n\to\infty} X^n \preceq X$. Ebenso folgt aus $X^n \succeq X$ die Relation $\lim_{n\to\infty} X^n \succeq X$.

Man kann zeigen, dass die genannten drei Axiome hinreichend für die Darstellung einer Präferenz durch eine Nutzenfunktion sind.[11] Wir werden am Beispiel der lexikographischen Präferenz

[10] Beachten Sie, dass die Vergleichbarkeit kein "entweder"-"oder" enthält! Vielmehr können sowohl $X \succeq Y$ als auch $Y \succeq X$ gleichzeitig erfüllt sein. Hätten wir uns entschieden, die Relation $X \succ Y$ zu verwenden, müsste das Axiom ein wenig anders lauten. Wir hätten zu fordern, dass entweder $X \succ Y$, $Y \succ X$ oder $X \sim Y$ gilt.

[11] Debreu bewies diesen Satz in der Arbeit "Representation of a Preference Ordering By a Numerical Function," in Thrall, R. (ed): *Decision Processes*. New York Wiley & Sons 1954, S. 159–165.

(s.u.) verdeutlichen, dass man dabei auf die eher technisch anmutende Stetigkeitsforderung nicht verzichten kann.

Satz 1.1 (Debreu, 1954) *Eine Präferenzrelation $\succeq$ erfüllt die oben genannten Axiome genau dann, wenn es eine Nutzenfunktion $U(x)$ derart gibt, dass die folgende Aussage gilt*

$$X \succeq Y \qquad \Longleftrightarrow \qquad U(X) \geq U(Y). \tag{1}$$

Wenn man einmal eine Nutzenfunktion $U(X)$ eines Investors gefunden hat, so kann man sehr leicht weitere Nutzenfunktionen finden, die dieselbe Präferenz repräsentieren. Betrachten Sie dazu eine strikt monoton wachsende Funktion $f(\cdot)$ wie etwa e^x. Wenn $U(\cdot)$ die Präferenz repräsentiert, dann tut dies auch $f(U(\cdot))$, denn aus der strikten Monotonie folgt

$$\begin{aligned} X \succeq Y \qquad &\Longleftrightarrow \qquad U(X) \geq U(Y) \\ &\Longleftrightarrow \qquad f(U(X)) \geq f(U(Y)) \end{aligned}$$

Die absolute Nutzenzahl spielt also keine Rolle, vielmehr kommt es nur auf die Relationen der Nutzenwerte zueinander an. Man nennt die Darstellung der Nutzentheorie daher auch ordinal. Wir wollen zuletzt zwei Beispiele von Präferenzrelationen betrachten.

Beispiel (lexikographische Ordnung) Wir betrachten die Güterbündel X und Y, die jeweils zwei Güter (Äpfel und Birnen) enthalten.

$$X = \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \end{pmatrix}, \qquad Y = \begin{pmatrix} Y_1 \\ Y_2 \end{pmatrix}.$$

X_1 und Y_1 zeigen Anzahl der Äpfel und X_2 und Y_2 Anzahl der Birnen in den entsprechenden Bündeln. Wir wollen sagen, dass Äpfel grundsätzlich besser als Birnen sind und, wenn in beiden Fällen gleich viel Äpfel (oder Birnen) vorliegen, die jeweilige Menge den letzten Ausschlag gibt. Die Präferenzrelation wird von uns dazu wie folgt definiert:

$$X \succeq Y :\Longleftrightarrow \; X_1 > Y_1 \text{ oder } (X_1 = Y_1 \text{ und } X_2 \geq Y_2).$$

Zur Erläuterung: Der Investor achtet zuerst auf die Anzahl der Äpfel. Sind sie in X größer als in Y, so zieht er das Güterbündel X dem Bündel Y vor, unabhängig davon, wie viel Birnen in beiden Bündeln enthalten sind. Sind dagegen in beiden Körben gleich viel Äpfel enthalten, so gibt die Anzahl der Birnen den Ausschlag. Prüfen wir die drei Axiome von Debreu.

1. Was ist mit dem Axiom der Vergleichbarkeit? Dieses Axiom ist dann erfüllt, wenn beliebige Güterbündel X und Y miteinander verglichen werden können. Bei den Güterbündeln sind nur die folgende Fälle möglich:

   – es gilt $X_1 > Y_1$ (“mehr Äpfel in X”). Dann folgt sofort $X \succeq Y$.

3 Unsicherheit: μ-σ–Theorie

3.1 Das Grundmodell: mehrere Basistitel

Lernziel: Wir lernen das Grundmodell unter Unsicherheit für die μ-σ–Theorie kennen.

Bei der Theorie des Erwartungsnutzens hatten wir uns des so genannten Grundmodells bedient. Dieses Grundmodell werden wir für unsere Zwecke anpassen müssen.

Beim Erwartungsnutzenmodell standen die Zahlungen in den einzelnen Zuständen im Fokus der Betrachtung. Bei der μ-σ–Theorie ist dies anders. Da wir diese Theorie bei der optimalen Portfoliowahl verwenden wollen, stehen hier weniger die Zahlungen in einzelnen Zuständen als vielmehr ein Markt von Wertpapieren im Vordergrund. Daher werden wir das Modell verändern: Wir gehen davon aus, dass an einem Markt insgesamt S Wertpapiere oder Basistitel gehandelt werden. Diese Basistitel sollen Zahlungen in der Zukunft versprechen, die wir mit Y^s bezeichnen wollen. Die Zahlungen sind im allgemeinen unsicher und stellen daher Zufallsvariablen dar. Der Erwartungswert der Zahlung des s–ten Basistitels werde mit $\mathrm{E}[Y^s]$ bezeichnet, die Kovarianz der Zahlungen des s–ten und des r–ten Basistitels mit $\mathrm{Cov}[Y^s, Y^r]$. Wir werden im Folgenden annehmen, dass wir die Erwartungswerte und Kovarianzen kennen. Die einzelnen Zahlungen Y^s dagegen müssen nicht notwendig bekannt sein.

Unter einem Portfolio verstehen wir eine Zusammenstellung von S Basistiteln, wir bezeichnen dieses Portfolio mit X. Diese Basistitel werden heute miteinander kombiniert und die Struktur des Portfolios ändert sich bis zum nächsten Zeitpunkt nicht mehr. Die Einträge in dem Portfoliovektor sind wie folgt zu interpretieren:[27]

[27] Der Leser beachte: Bei X_s handelte es sich im Grundmodell des Erwartungsnutzens um eine Zahlung des Titels X im Zustand s. Hier steht X_s für die Menge des Titels Y^s!

$$X = \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \\ \vdots \\ X_S \end{pmatrix} \quad \begin{array}{ll} \longleftarrow & \text{Menge erstes Wertpapier} \\ \longleftarrow & \text{Menge zweites Wertpapier} \\ & \quad\vdots \\ \longleftarrow & \text{Menge } S\text{–tes Wertpapier} \end{array}$$

Bevor wir mit unserer Analyse fortfahren, müssen wir auf einen ersten wichtigen Unterschied zum Grundmodell des Erwartungsnutzens hinweisen. Dort bedeutete ein negativer Eintrag in dem Wertpapiervektor, dass dieser Titel negative Gütermengen zahlte – und der Inhaber entsprechend liefern musste. Hier bedeutet ein negativer Eintrag, dass der Inhaber des Assets beispielsweise -3 Titel eines Basistitels besitzt. Was soll das heißen?

Ein positiver Eintrag bedeutet, dass der Investor die mit dem Wertpapier verbundenen Dividendenzahlungen der nächsten Periode erhält. Ein negativer Eintrag kann also nur bedeuten, dass er diese Dividendenzahlungen selbst zu liefern hat – oder anders gesagt, dass er in der Zukunft das Wertpapier nicht besitzen, sondern selbst liefern muss. Diese Situation kann realistischerweise so verstanden werden, dass der Investor sich heute das Asset borgt und es einen Zeitpunkt später wieder zurückgeben muss. Diesen Vorgang bezeichnet man als Leerverkauf, er wird in Deutschland von Privatpersonen derzeit eher selten praktiziert. Für institutionelle Anleger existiert ein standardisiertes Verfahren (unter Einbeziehung eines clearing houses), mit dem diese Leerverkäufe abgewickelt werden.

Wir benötigen für den Fortgang der Untersuchungen noch eine Reihe von Annahmen. So werden wir unterstellen, dass unter den genannten S Wertpapieren ein risikoloser Titel ist. Der Einfachheit halber sei dies der erste Titel. Hier entsteht also ein wichtiger Unterschied zum vorigen Grundmodell. Das risikolose Portfolio wird jetzt durch $(1,0,\ldots,0)$ beschrieben; im Grundmodell der Erwartungsnutzentheorie war der risikolose Titel dagegen $(1,1,\ldots,1)$.

Des weiteren wollen wir annehmen, dass sich unter den riskanten Titeln nur soviele Assets wie unbedingt nötig befinden sollen. Aber wann ist ein Titel überflüssig? Ein Titel ist offensichtlich genau dann überflüssig, wenn seine Zahlungen durch ein geschickt zusammengestelltes Portfolio aus den verbleibenden $S-2$ Titel dupliziert werden können. Betrachten wir der Einfachheit halber den S–ten Basistitel und unterstellen, dass die verbleibenden $S-2$ ebenfalls eine Zahlung in der Höhe realisieren können, die der Zahlung des S–ten Titels entspricht. Mit geeigneten Mengen $X_2, X_3, \ldots$ der Wertpapiere gilt dann aber

$$Y^S = X_2 \cdot Y^2 + X_3 \cdot Y^3 + \cdots + X_{S-1} \cdot Y^{S-1}$$

oder umgestellt

$$0 = X_2 \cdot Y^2 + X_3 \cdot Y^3 + \cdots + X_{S-1} \cdot Y^{S-1} + \underbrace{X_S}_{=-1} \cdot Y^S. \tag{9}$$

Wenn also ein Titel (in unserem Beispiel der S–te) nachgebaut werden kann, dann kann insbesondere auch ein Portfolio ohne Zahlungsverpflichtungen (“Nullportfolio”) aus den $S-1$ riskanten Basistiteln erzeugt werden.[28]

[28] Man sagt auch, die Wertpapierzahlungen seien linear abhängig, wenn eine Relation der Form (9) gilt.

Wie kann man überprüfen, ob es in einer Menge von Basistiteln duplizierbare Portfolios gibt? Man wird ja schlecht dem Anwender vorschlagen, alle möglichen Portfolios X auf Gültigkeit der Beziehung (9) zu überprüfen. Es gilt folgender Zusammenhang, auf dessen Beweis wir verzichten.

Satz 3.1 *Unter $S-1$ riskanten Basistiteln sind keine Titel überflüssig genau dann, wenn die Kovarianz–Matrix*

$$\begin{pmatrix} \mathrm{Cov}[Y^2,Y^2] & \mathrm{Cov}[Y^2,Y^3] & \cdots & \mathrm{Cov}[Y^2,Y^S] \\ \mathrm{Cov}[Y^3,Y^2] & \mathrm{Cov}[Y^3,Y^3] & \cdots & \mathrm{Cov}[Y^3,Y^S] \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \mathrm{Cov}[Y^S,Y^2] & \mathrm{Cov}[Y^S,Y^3] & \cdots & \mathrm{Cov}[Y^S,Y^S] \end{pmatrix}$$

eine von Null verschiedene Determinante hat.

3.2 *Erwartungsnutzen und μ-σ–Theorie*

Lernziel: Wir zeigen, unter welchen Umständen man eine μ-σ-Nutzenfunktion aus dem Erwartungsnutzenkalkül herleiten kann.

Die μ-σ-Theorie, die wir nun kennenlernen wollen, geht auf die Arbeit von Markowitz ("Portfolio Selection," *Journal of Finance*, **7** 1952, S. 77–91) zurück, der dafür mit dem Nobelpreis geehrt wurde.

In der Erwartungsnutzentheorie war es notwendig, die Zahlungen eines Portfolios in jedem Zustand zu kennen: Daraus wurden die entsprechenden Nutzenniveaus ermittelt. Von diesen Nutzenniveaus ist der Erwartungswert zu berechnen und dieser Erwartungswert bildet die Grundlage für die Entscheidung. Markowitz schlug nun vor, diese Rechenverfahren zu vereinfachen. Der Ertrag eines Wertpapieres soll durch den Erwartungswert, das Risiko dagegen einfach durch die Varianz abgebildet werden. Je besser der Erwartungswert, desto besser für den Entscheidungsträger. Je höher die Varianz, desto unangenehmer für den Entscheidungsträger. Dieses Risikomaß hat den unbestrittenen Vorteil, dass es sehr leicht zu implementieren ist und es hat sich denn auch in der modernen Finanzmarkttheorie (im Gegensatz zum Erwartungsnutzen) auf breiter Front in der Praxis durchgesetzt.

Die Nutzenfunktion ist daher von der Gestalt

$$V(\mathrm{E}[X], \mathrm{Var}[X]).$$

V ist eine beliebige Funktion, die in der ersten Variable strikt monoton wachsend und in der zweiten strikt monton fallend ist.

Wenn ein Entscheidungsträger diese Nutzenfunktion benutzen soll, müssen wir vorab folgende Frage klären. Für uns beruhten Nutzenfunktionen immer auf Präferenzen von Investoren. Welche Annahmen an die Präferenzen eines Investors sind aber notwendig, damit dieser eine Nutzenfunktion aufweist, die in der Tat nur noch vom Erwartungswert und der Varianz einer Zahlung abhängig ist?

In der Literatur hat man bisher eine Antwort auf diese Frage umgangen. Vielmehr wurde versucht, den μ-σ–Nutzen auf der Erwartungswerttheorie zu begründen. Es sind bis heute drei Spezialfälle bekannt, in denen diese Vereinbarkeit gelingt. Wir wollen diese Möglichkeiten kurz darstellen; wir werden sehen, dass insbesondere im finanzwirtschaftlichen Kalkül diese Zugänge eher fragwürdig sind.

1. Fall: quadratischer Nutzen Markowitz, der Begründer des μ-σ–Modells, bemerkte bereits, dass unter der Annahme einer quadratischen Nutzenfunktion die Vereinbarkeit beider Modelle gelingt. Es gilt nämlich mit geeigneten reellen Konstanten a,b ($a > 0$) und der Nutzenfunktion

$$u(t) := -at^2 + bt \qquad (10)$$

der Zusammenhang

$$\begin{aligned} \mathrm{E}[u(X)] &= \mathrm{E}[-aX^2 + bX] \\ &= -a\,\mathrm{Var}[X] - a\,\mathrm{E}[X]^2 + b\,\mathrm{E}[X] =: V(\mathrm{E}[X], \mathrm{Var}[X]). \quad (11) \end{aligned}$$

Ein Entscheidungsträger, der seine Erwartungsnutzenfunktion maximiert, verhält sich gleichzeitig wie ein Investor, der den Forderungen des μ-σ–Modells gehorcht.

Allerdings hat der Zugang (11) eine Reihe schwerwiegender Nachteile. Zum ersten ist die Nutzenfunktion nicht monoton im Erwartungswert. Zeichnet man diese Nutzenfunktion für genügend große Werte $\mathrm{E}[X]$ (genauer für $\mathrm{E}[X] > \frac{b}{2a}$), dann sinkt der Nutzen mit steigendem Erwartungswert. Dieses Ergebnis ist natürlich sehr unplausibel. Es würde bedeuten, dass ein Entscheidungsträger unter Umständen ein Portfolio ablehnt, weil es zu hohe erwartete Zahlungen verspricht!

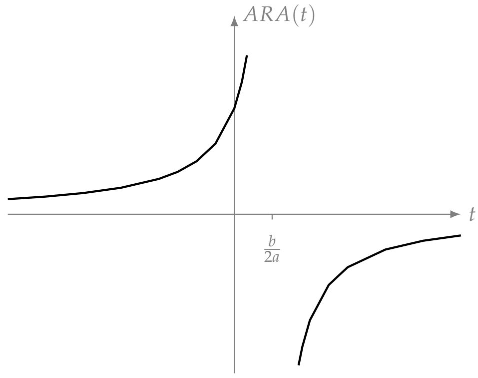
Weiter zeigt sich eine Schwierigkeit dieses Zuganges, auf die Arrow (*Essays in the Theory of Risk Aversion*, Chicago Markham 1971) verwiesen hat. Arrow zeigte, dass ein Entscheidungsträger mit quadratischer Nutzenfunktion immer wachsende absolute Risikoaversion aufweist. Das können wir sehr einfach nachrechnen:

$$\begin{aligned} ARA(t) &= -\frac{u''(t)}{u'(t)} \\ &= -\frac{-2a}{-2at + b} = \frac{1}{\frac{b}{2a} - t}. \end{aligned}$$

Zeichnet man diese Funktion, so ergibt sich eine Darstellung wie in Abbildung 11 angedeutet. Wir erkennen, dass (mit Ausnahme der Polstelle) die absolute Risikoaversion immer wachsend ist. Dies bedeutet aber, dass ein solcher Entscheidungsträger bei höherem Vermögen immer eine sinkende Nachfrage nach riskanten Titel aufweist. Ein solches Verhalten ist ebenfalls sehr unplausibel.

Zusammenfassend bleibt zu sagen, dass eine bestimmte quadratische Nutzenfunktion zwar zum μ-σ Modell führt, dieser Weg aber mit schwerwiegenden Nachteilen behaftet ist.

Abbildung 11: ARA für quadratische Nutzenfunktionen



2. Fall: normalverteilte Rückflüsse Eine zweite Möglichkeit, den Erwartungsnutzen und den μ-σ Kalkül miteinander zu vereinen, besteht durch die Annahme eines Kontinuums an zukünftigen Umweltsituationen. Weiter wird vorausgesetzt, dass die Nutzenfunktion $u(t)$ analytisch ist (sich also für alle $t \in \mathbb{R}$ in eine Taylor–Reihe entwickeln lässt) und dass sie strikt monoton und strikt konkav ist. Die Basistitel seien multivariat normalverteilt.[29] Dann lässt sich beweisen, dass ein Entscheidungsträger, der sich gemäß dem Erwartungsnutzen verhält, ebenfalls den Anforderungen des μ-σ–Modells genügt.
Beweis: Zum Beweis der Vereinbarkeit von Erwartungsnutzen und μ-σ Kalkül entwickeln wir die Nutzenfunktion $u(t)$ an der

[29] Zur Definition siehe zum Beispiel Bronstein, S. 203 (Bronstein, I. and Semendjajew, K., *Taschenbuch der Mathematik*, 21. edn, Nauka Teubner Moskau, Leipzig 1983.).
Die Normalverteilung wird auch als Gaussche Verteilung bezeichnet, obwohl sie nicht von Gauss, sondern von de Moivre entdeckt wurde. Dass alle "wichtigen Gesetze" falsche Namen tragen und warum das so sein muss, kann man in dem durchaus Ernst gemeinten Artikel von Stigler ("Stigler's Law of Eponymy", *Transactions of the New York Academy of Science*, **39** 1980, S. 147–157) nachlesen.