# *Skript zu*
# *“Investition” (BWL-B)*

*Univ.–Prof. Dr. Dr. Andreas Löffler*

*letzte Aktualisierung vom 28. April 2010*

## *Inhaltsverzeichnis*

## *Verzeichnis der Definitionen und Sätze im Skript*

# 1 Finanzmathematik

**Lernziel:** Sie lernen wichtige Gleichungen kennen, die die Entwicklung von Kontoständen bei bestimmten Ein- und Auszahlungen beschreiben.

## *Symbolverzeichnis*

| | |
|---|---|
| $n$ | Laufzeit eines Kapitalüberlassungsvertrages in Jahren |
| $t$ | Zeitpunkt mit $t = 0, 1, 2, \ldots, n$ |
| $i$ | (sicherer) Zinssatz p. a. |
| $q$ | Zinsfaktor, $q := 1 + i$ |
| $Z_t$ | Zinszahlung im Zeitpunkt t |
| $K_t$ | Kapitalbestand / Kontostand im Zeitpunkt t |
| $K_n$ | Endkapital |
| $K_0$ | Anfangskapital |
| $r_t$ | Nachschüssige Rente im Zeitpunkt t |
| $R_t$ | Endwert einer nachschüssigen Rente im Zeitpunkt t |
| $R_n$ | Endwert einer nachschüssigen Rente |
| $R_0$ | Barwert einer nachschüssigen Rente |
| $T_t$ | Tilgung im Zeitpunkt t |
| $A_t$ | Annuität im Zeitpunkt t |

## 1.1 *Einleitung*

Wer sich mit Investitionsrechnung auseinander setzen will, muss die Grundbegriffe und Zusammenhänge der Finanzmathematik beherrschen. Hierbei geht es um die Frage, wie sich ein Kontostand entwickelt, wenn dort gleichmäßige oder einmalige Ein- bzw. Auszahlungen erfolgen.

## 1.2 *Zinseszinsrechnung*

Zinsansprüche, die während der Laufzeit des Kapitalüberlassungsvertrages entstehen, werden dem zinstragenden Kapital am Ende jeder Zinsperiode zugeschlagen. Eine Zinsperiode entspricht im Folgenden einem Jahr.[1]

*Beispiel 1.1:* Im Zeitpunkt $t = 0$ legen Sie €1.000 zu 10 % p. a. an. Auf welchen Betrag ist Ihr Kapital nach drei Jahren angewachsen?[2] ■

| $t$ | $Z_t$ | $K_t$ | Entwicklung der Zinseszinsformel |
|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 1.000 | $K_0$ |
| 1 | 100 | 1.100 | $K_1 = K_0 + K_0 \cdot i = K_0 \cdot (1+i)$ |
| 2 | 110 | 1.210 | $K_2 = K_1 + K_1 \cdot i = K_1 \cdot (1+i) = K_0 \cdot (1+i)^2$ |
| 3 | 121 | 1.331 | $K_3 = K_2 + K_2 \cdot i = K_2 \cdot (1+i) = K_0 \cdot (1+i)^3$ |
| $\vdots$ | | | $\vdots$ |
| n | | | $K_n = K_0 \cdot (1+i)^n$ |

[1] Unterjährliche und stetige Verzinsung betrachten wir nicht.

[2] In allen folgenden Beispielen wurden die Berechnungen mit EXCEL vorgenommen. Die ermittelten Zahlenwerte (also auch die Zwischenergebnisse) wurden kaufmännisch gerundet. Rechnen Sie dagegen mit einem Taschenrechner, so kann es passieren, dass in einzelnen Fällen die Endergebnisse geringfügige Abweichungen aufweisen. Wenn Sie Fragen zur Genauigkeit der Klausuraufgaben haben, so lesen Sie den Vorlesungsplan und die dort aufgeführten Fragen zur Klausur.

# 2 Investitionsrechnung unter Sicherheit

*Symbolverzeichnis*

| | |
|---|---|
| $T$ | Nutzungsdauer eines Investitionsprojektes in Jahren |
| $t$ | Zeitpunkt mit $t = 0, 1, 2, \ldots, T$ |
| $\mathrm{C}_t$ | Konsum bzw. Entnahme im Zeitpunkt $t$ |
| $CF_t$ | Cashflow im Zeitpunkt $t$ |
| $G_t$ | Finanzierungslimit / Kreditlinie |
| $i$ | (sicherer) Zinssatz p. a. / Kalkulationszinssatz |
| $i_z$ | interner Zinssatz |
| $i_H$ | Haben–Zinssatz |
| $i_S$ | Soll–Zinssatz |
| $I_0$ | Investitionausgabe im Zeitpunkt $t = 0$ |
| $\mathrm{K}_t$ | Kontostand im Zeitpunkt $t$ |
| $L_T$ | Liquidationserlös im Zeitpunkt $t = T$ |
| $\mathrm{M}_t$ | investitionsunabhängige Basiszahlungen im Zeitpunkt $t$ |
| $Z_t$ | Zinsen, die im Zeitpunkt $t$ fällig werden |

## 2.1 Grundlegende Zusammenhänge und Begriffe

**Lernziel:** Sie erkennen, was Cashflows sind und verstehen, dass sie im Mittelpunkt des finanzwirtschaftlichen Interesses stehen.

*Zahlungsgrößen oder Cashflows* In der betrieblichen Finanzwirtschaft[7] stehen Zahlungsgrößen im Vordergrund. Statt Zahlungsüberschuss sprechen wir auch vom Cashflow.[8] Ein Financier interessiert sich nicht (oder nur mittelbar) dafür, welchen Gewinn ein Unternehmen erwirtschaftet; er will nicht wissen, wie viel Personal man für ein Investitionsprojekt benötigt oder ob ein Produkt einen großen Fortschritt für die Menschheit bringen wird. Ihm ist es a priori nicht wichtig, ob ein Produkt sinnvoll und nützlich ist oder man sich damit nur die Zeit vertreiben kann. Die zentrale Frage eines Financiers lautet immer: Welche Zahlungen löst das Projekt oder das Produkt aus? Wann erfolgen diese Zahlungen? Welchen Risiken unterliegen sie?

Man kann diese Geisteshaltung berechtigt kritisieren. Auf der anderen Seite aber erfüllen Finanzwirte in einem Unternehmen eine ganz wichtige Aufgabe. Sie haben dafür zu sorgen, dass das Unternehmen jederzeit über ausreichende Liquidität verfügt. Es liegt in ihrer Verantwortung, dass das Unternehmen jederzeit in der Lage ist, seine Rechnungen pünktlich zu bezahlen. Daher fokussiert ein Financier auf Zahlungsgrößen und blendet vieles, was damit im Zusammenhang steht aus (oder stellt es zurück). Diese Sichtweise werden wir von nun an auch einnehmen.

Wenn Finanzwirte sich auf Cashflows konzentrieren, so haben sie die damit erzielbaren Einkommen im Blick. Sie ignorieren Aspekte, die sich nicht mit Einkommenserzielung vereinbaren

[7] Im deutschen Sprachraum unterscheidet man zwischen Finanz*wirtschaft* und Finanz*wissenschaft*. Letztere ist ein Teilgebiet der VWL und beschäftigt sich mit Problemen der optimalen Besteuerung in einer Gesellschaft. Halten Sie beide Begriffe auseinander, da man sich bei solchen feinen begrifflichen Verwechslungen häufig dem Vorwurf einer völliger Unkenntnis auf dem Gebiet der Wirtschaftswissenschaft aussetzt. Finanzwirtschaft und Finanzierung sind Synonyme.

[8] Die Schreibweise Cash flow ist aus dem angelsächsischen Sprachraum. Im Deutschen war noch Cash-Flow zulässig, ist nach der neuen Rechtschreibung fehlerhaft.

lassen. Auch diese verkürzte Sichtweise auf eine Einkommenserzielung ist durchaus problematisch. Man kann kaum bestreiten, dass es Ziele und Motive gibt, die mit Einkommenserzielung nichts oder nur wenig zu tun haben: Denken Sie an das Streben nach Macht und Einfluss oder an den Wunsch, bestimmte ethische Normen zu beachten. Aber auch hier werden wir uns die Sichtweise der Finanzierer zu eigen machen.

*Konkurrierende Theorieansätze* In der Regel haben die Individuen eine ganze Reihe verschiedener Möglichkeiten (Alternativen), um Einkommen zu erzielen. Theoretische Ökonomen pflegen sich auf die Entscheidungen zu konzentrieren, welche die Individuen in diesem Zusammenhang zu treffen haben. Dabei können verschiedene Wege beschritten werden.

– Die *deskriptive* oder auch erklärende oder positive Theorie beschreibt empirisch, wie Entscheidungen in der Realität tatsächlich getroffen werden.

– Demgegenüber geht es in der *präskriptiven* oder auch praktisch–normativen Theorie um die Frage, wie man Entscheidungen vernünftigerweise treffen sollte.[9]

[9] Die Theorie vermeidet Aussagen, ob sich die Erzielung von Einkommen mit Rückgriff auf ethische Normen rechtfertigen lässt. Das wäre in einer bekennend–normativen Theorie anders.

Im Rahmen der betrieblichen Finanzwirtschaft herrscht der Ansatz der normativen Theorie vor. Auf die deskriptive Theorie werden wir überhaupt nicht nicht eingehen.

*Die Begriffe Investition und Finanzierung* Die betriebswirtschaftliche Literatur fasst die Begriffe “Finanzierung” und “Investition” nicht einheitlich. Wir beschränken uns im Folgenden auf die Betrachtung der Zahlungswirkungen und definieren daher:

Investition heißt eine Tätigkeit, die zunächst Auszahlungen und später Einzahlungen verursacht. $(- - + + +)$

Ergänzend sei angemerkt, dass Investitionen als Vorgänge der Kapitalverwendung interpretiert werden können, die in der Regel die Aktivseite der Bilanz eines Unternehmens verändern.

Finanzierung nennen wir dagegen einen Vorgang, der mit Einzahlungen beginnt, auf die später Auszahlungen folgen. $(+ - - - -)$

Im Zusammenhang mit Finanzierungsvorgängen wird oft auch von Kapitalbeschaffung gesprochen, die sich im Regelfall auf der Passivseite einer Bilanz niederschlägt.

Wichtige weitere Aspekte von Investitions– und Finanzierungsvorgängen bleiben bei dieser Form der Begriffsbildung unberücksichtigt, zum Beispiel die Risiken finanzwirtschaftlicher Aktivitäten oder leistungswirtschaftliche Eigenschaften von Investitionen.

*Finanzwirtschaftliche Entscheidungen* In der Finanzwirtschaft unterstellen wir, dass Individuen nur ein Ziel haben: Sie wollen ihr Einkommen maximieren. Alles andere interessiert sie nur dann, wenn es diesem Ziel behilflich sein kann. Diese Sicht mag stark vereinfachend sein – aber wir wollen in der Finanzwirtschaft nicht die gesamte Welt erklären, sondern nur beschreiben, was die Triebkräfte an Finanzmärkten sind. Und die dort tätigen Akteure verhalten sich typischerweise so, als ob sie ihr Einkommen maximieren.

Die Investoren suchen nach optimalen Investitions– und Finanzierungsalternativen und müssen dabei Nebenbedingungen (man spricht von Budgetrestriktionen) beachten. Unsere Individuen agieren in einem idealisierten Umfeld, was uns in den Stand versetzt, sehr klare Handlungsanweisungen zu formulieren. Im Laufe des Semesters werden wir beispielsweise folgende Fragen beantworten:

– Sollten die laufenden Cashflows eines Unternehmen in neue Projekte investiert oder ausgeschüttet und privat am Kapitalmarkt angelegt werden?

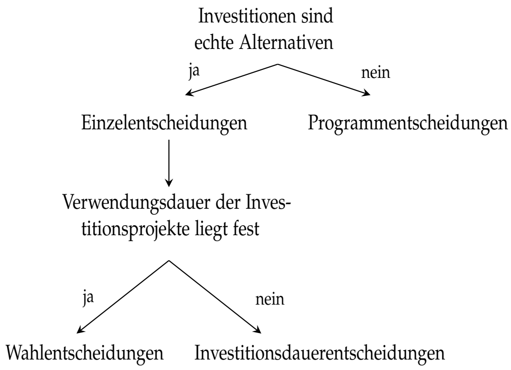
– Welchen Einfluss hat höheres Zahlungsrisiko auf eine Investitionsentscheidung?

## 2.2 *Arten von Investitionsentscheidungen*

**Lernziel:** Sie können die verschiedene Arten von Investitionsentscheidungen unterscheiden und konzentrieren sich dann auf Wahlentscheidungen.

*Wahlentscheidungen* Die folgende Übersicht (Abbildung 1) zeigt uns, wie Investitionsentscheidungen grundsätzlich differenziert werden können. So besteht die Möglichkeit, dass Investitionsentscheidungen echte Alternativen sind, man also ein Produkt A (etwa einen neuen Fahrzeugtyp) oder ein Produkt B (etwa einen bereits bestehenden Fahrzeugtyp) in einer Produktionsstätte produzieren lässt, eine Herstellung beider Produkte jedoch ausgeschlossen ist. In dieser Situation spricht man von so genannten Einzelentscheidungen.

Abbildung 1: Übersicht über Investitionsverfahren




Sind die Investitionsentscheidungen dagegen keine Alternativen, so nennen wir sie Programmentscheidungen. Wir werden uns im Laufe dieser Vorlesung nicht mit Programmentscheidungen befassen.

Bei den Einzelentscheidungen wiederum besteht die Möglichkeit, dass die Investitionsdauer des Projektes festliegt (Wahlentscheidung) oder selbst Gegenstand der Entscheidung ist (Investitionsdauerentscheidung). Im letzteren Fall tritt ein Element der Unsicherheit hinzu, das wir im Rahmen der Assessmentphase noch nicht behandeln können. Wir konzentrieren uns daher auf Wahlentscheidungen.

*Statische Verfahren* Die statischen Verfahren der Investitionsrechnung orientieren sich an durchschnittlichen Erfolgsgrößen (Gewinn, Kosten, Rendite) über die Zeit. In der statischen Rechnung sind (bei gleicher Höhe) frühere Zahlungsströme genau so viel wert wie spätere.[10] Investoren verhalten sich aber grundlegend anders – daher werden wir auf die statischen Verfahren gar nicht eingehen. Alles andere wäre Zeitverschwendung.

[10] Eine Ausnahme bildet die Amortisationsrechnung, die von Zahlungsströmen (Cashflows) ausgeht.

## 2.3 Dynamische Verfahren

**Lernziel:** Sie können Kapitalwert und vollständige Finanzpläne anwenden und wissen, welchen ökonomischen Hintergrund diese Begriffe besitzen. Sie erkennen, dass der interne Zins kein sinnvolles Entscheidungskriterium ist.

Die dynamischen Verfahren der Investitionsrechnung orientieren sich an den Cashflows. Wir gehen jetzt auf drei Verfahren (vollständiger Finanzplan, Kapitalwert, interner Zins) ein.

*Vollständige Finanzpläne* Wir wollen jetzt die Frage aufwerfen, wie man Investitionsentscheidungen mit Hilfe *vollständiger Finanzpläne* treffen kann. Dazu müssen wir zwei Zahlungen unterscheiden:

- Zum einen gibt es Zahlungen, die auch dann anfallen, wenn das Investitionsprojekt nicht durchgeführt wird. Man spricht von Basiszahlungen. Wir bezeichnen sie mit $M_t$.
- Dann gibt es Zahlungen, die nur im Zusammenhang mit dem Investitionsprojekt auftreten. Die Höhe dieser Zahlungen wird mit $CF_t$ beschrieben, wenn es sich um Rückflüsse handelt. Die Rückflüsse fallen typischerweise erst in $t > 0$ an. Für die heutigen Investitionsausgaben schreiben wir $I_0$.[11]

[11] In seltenen Fällen wird von unserer Notation abweichend $CF_0 = -I_0$ geschrieben.

Wir gehen davon aus, dass aus einer Finanzplanung alle genannten Zahlungsgrößen bestimmbar sind. Wir werden dazu gleich ein konkretes Beispiel betrachten, bei dem in Tabelle 2 die Zahlungsgrößen für zwei Beispielprojekte A und B zusammengefasst werden. In der Tabelle stehen auch die Basiszahlungen $M_t$, die nicht abhängig von beiden Projekten sind.

Wir haben bereits beschrieben, worauf sich Finanzwirte konzentrieren. Zu diesem Zweck nehmen wir an, dass wir die Auszahlungen für den Konsum der Eigentümer ebenfalls kennen. Im Zeitpunkt $t$ mögen die Investoren den Betrag $C_t$ für ihren Konsum ausgezahlt bekommen. Der Finanzierer eines Unternehmens wird nun versuchen, dass nach den Zahlungsströme verbleibende Endvermögen im Unternehmen zu maximieren. Dazu dient das nachfolgende Beispiel.

*Beispiel 2.1:* Ihr Konsumplan lautet $(50; 50; 50; 50)$. Die Basiszahlungen in Ihrem Unternehmen betragen (100; 80; 120; 90). Der Habenzinssatz liegt bei $i_H = 10\,\%$ und der Sollzinssatz bei $i_S = 15\,\%$.

könnte jeder Investor einen risikolosen Gewinn erzielen, indem er sich möglichst viel Geld borgt. Den Rückzahlungsbetrag, der wegen des negativen Zinses unter dem Auszahlungsbetrag liegt, könnte er kostenfrei lagern und den Differenzbetrag für zusätzlichen Konsum verwenden.

## 3 Investitionsrechnung unter Unsicherheit

Im vorausgegangenen Kapitel des Skripts haben wir uns mit Investitions– und Finanzierungsentscheidungen unter Sicherheit beschäftigt. Für eine erste Annäherung an die Finanzierungstheorie stellt dies zunächst sicherlich eine zweckmäßige Vereinfachung dar. In der Realität hingegen werden unternehmerische Entscheidungen naturgemäß unter Unsicherheit getroffen. In diesem letzten Abschnitt wollen wir uns nun mit der Frage auseinander setzen, wie in einer solchen Situation zu entscheiden ist. Dabei handelt es sich um ein nicht so ganz einfaches Thema, und daher werden wir uns in der Assessmentphase mit wenigen grundsätzlichen Überlegungen begnügen.

Man könnte auf die Idee kommen, als beste Alternative im Fall von Unsicherheit gerade diejenige mit dem höchsten Erwartungswert zu wählen. Diese Idee ist aber keine besonders geschickte. Wir werden dies an zwei einfachen Beispielen illustrieren.

### 3.1 Einführung: Das Petersburger Spiel

**Lernziel:** Sie erkennen, dass risikoaverse Investoren sich bei unsicheren Entscheidungen nicht des Erwartungswertes bedienen sollten. Sie können risikofreudiges, risikoneutrales und risikoaverses Verhalten definieren.

Betrachten Sie ein Spiel, das genau einmal durchgeführt wird und für dessen Teilnahme Sie einen Geldbetrag bezahlen sollen, dessen Höhe vorerst unbekannt ist.[24] Der Spielleiter wirft eine Münze. Er tut dies so oft, bis auf der Münze "Zahl" erscheint. In Abhängigkeit von der Anzahl der notwendigen Würfe gibt es für den Teilnehmer des Spiels eine Auszahlung. Diese Auszahlung ermittelt sich wie in Abbildung 7 dargestellt.

[24] Dieses Spiel ist durch die Arbeit Daniel Bernoullis berühmt geworden. Da Bernoulli zum damaligen Zeitpunkt in Petersburg residierte, hat es den Namen Petersburger Spiel erhalten.

Abbildung 7: Die Auszahlungsstruktur

| Anzahl der Würfe *(Zustand s)* | Auszahlung $(X_s)$ |
|---|---|
| 1 Wurf | 1 Geldeinheit |
| 2 Würfe | 2 Geldeinheiten |
| 3 Würfe | 4 Geldeinheiten |
| 4 Würfe | 8 Geldeinheiten |
| 5 Würfe | 16 Geldeinheiten |
| $\vdots$ | $\vdots$ |

Mit der Anzahl der notwendigen Würfe verdoppelt sich die Auszahlung. Befragen wir den ökonomisch nicht versierten Leser, welchen Betrag er als "fairen Wert des Spieles" (auch Eintrittspreis, Spielgebühr, Gegenwartswert, present value) bezeichnen würde, so werden sehr selten Werte über fünf Geldeinheiten genannt.

Um zu verstehen, worin das Problem dieses Spiels besteht, versuchen wir die erwartete Auszahlung zu ermitteln. Beim Erwartungswert handelt es sich um eine Größe, die den durchschnittlichen Rückfluss aus dem Spiel wiedergibt, wenn man dieses Spiel nur hinreichend oft spielt. Der erwartete Auszahlungsbetrag dieses Spiel ergibt sich durch folgende Rechnung

$$\begin{aligned} & 1 \cdot \frac{1}{2} + 2 \cdot \frac{1}{2^2} + 4 \cdot \frac{1}{2^3} + 8 \cdot \frac{1}{2^4} + \cdots \\ & = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \cdots \\ & = \infty. \end{aligned}$$

Bedenken wir, dass nahezu niemand für dieses Siel mehr als fünf

Geldeinheiten zahlen würde, ist dieses Ergebnis paradox. Wir erkennen nämlich, dass die durchschnittliche Auszahlung unendlich hoch ist. Jeder Investor müsste auch bei astronomischen Teilnahmebedingungen (beispielsweise einem Spieleinsatz von jeweils 100.000 Geldeinheiten und mehr) dieses Spiel spielen, denn im Durchschnitt wird er gewinnen!

Lässt man sich die Bedingungen des Spieles durch den Kopf gehen, so könnte man vermuten, dass das Paradox eine sehr leichte Auflösung besitzt.[25] Wenn man sehr viele Münzwürfe benötigt, um Zahl zu erzielen, wachsen die Auszahlungsbeträge über alle Grenzen. Aber niemand ist in der Lage, Milliarden oder gar Billionen für ein einziges Spiel zu zahlen. Beschränken wir uns auf einen Höchstbetrag von etwa 16 Million oder 25 Würfe, so erhalten wir als erwartete Auszahlung[26]

$$\frac{1}{2} + 2 \cdot \frac{1}{2^2} + 4 \cdot \frac{1}{2^3} + 8 \cdot \frac{1}{2^4} + \cdots + 2^{23} \cdot \frac{1}{2^{24}} + 2^{24} \cdot \frac{1}{2^{24}} = 13.$$

Dieses Ergebnis ist nun alles andere als paradox; es scheint dass wir eine Lösung gefunden haben.

Um deutlich zu machen, dass hinter dem Petersburger Paradox mehr steckt als nur ein trickreicher Täuschungsversuch, wollen wir ein weiteres Spiel vorschlagen. Dieses Spiel wird noch klarer als das Petersburger Spiel offenbaren, welches Problem bei der Verwendung von erwarteten Zahlungen entsteht. Stellen Sie sich dazu folgende Situation vor. Sie dürfen einmalig an einem Spiel teilnehmen, bei dem der Dozent eine Münze wirft. Um dieses Spiel zu bestreiten, müssen Sie einen Einsatz leisten und können, wenn Sie Glück haben, mit einem Gewinn nach Hause gehen. Der Einsatz besteht darin, dass Sie Ihr gesamtes zukünftiges Gehalt dem Dozenten überschreiben. Nachdem Sie die entsprechende Erklärung[27] unterzeichnet haben, wirft der Dozent die Münze. "Kopf" bedeutet, dass der Dozent (vielleicht glaubwürdiger: eine Bank) Ihr Gehalt verdoppelt. Haben Sie das Pech, dass der Dozent jedoch "Zahl" wirft, so gehen Sie leer aus.

Wenn Sie sich mit kühlem Kopf die Spielregeln noch einmal vor Augen führen, sollten Sie von diesem Spiel Abstand nehmen. Niemand geht ein solch hohes Risiko ein. Wer aber auf den Erwartungswert hört, muss anders entscheiden. Denn es gilt offensichtlich

$$\underbrace{\frac{1}{2} \cdot 2 \cdot \text{Gehalt} + \frac{1}{2} \cdot 0 \cdot \text{Gehalt}}_{\text{Auszahlung}} = \underbrace{\text{Gehalt}}_{\text{Spieleinsatz}} .$$

Damit handelt es sich (gemessen am Erwartungswert) um ein faires Spiel. Sie dürften also eigentlich nicht zögern, es wenigstens einmal zu versuchen! Wir haben gar keine andere Möglichkeit, als aus unserem Gedankenexperiment den folgenden Schluss zu ziehen: Wer dem Erwartungswert folgt, ignoriert (unter Umständen beträchtliche) Risiken.

Die beiden Beispiele verdeutlichen folgendes. Wenn wir davon ausgehen, dass der *Erwartungswert* einer Auszahlung der als

[25] Auf diesen Gedankengang hat noch vor Bernoulli Cramer hingewiesen.

[26] Die Wahrscheinlichkeit der höchsten Auszahlung von $2^{24}$ muss so gewählt werden, dass sich alle Wahrscheinlichkeiten zu 1 summieren. Man überlegt sich so, dass nur der Wert $\frac{1}{2^{24}}$ in Frage kommt.

[27] Wenn Sie bis jetzt genau so fleißig studiert haben, wie dies die Prüfungsordnung vorsieht, so sollte Ihnen der § 762 BGB etwas sagen – ignorieren Sie ihn bitte bei diesem Gedankenexperiment.

"fair" empfundene Wert eines Spiels sein soll, dann weichen *Gegenwartswert* (auch fairer Preis) deutlich davon ab. So ist der Erwartungswert der Auszahlung beim Petersburger Paradox unendlich, während der faire Wert etwa bei fünf lag. Ebenso ist der Erwartungswert der Auszahlung beim Lohnverpfändungsspiel (einmal "Gehalt") viel niedriger als der Wert, für den wir bereit wären, dieses Spiel überhaupt zu einzugehen. Wenn $p(X)$ den fairen Wert des Spieles bezeichnet, so gilt

$$\text{fairer Wert} = p(X) < \mathrm{E}[X] = \text{Erwartungswert der Zahlungen.}$$

Wer bisher der Intuition anhing, man könne unter Unsicherheit einfach die unsichere Zahlung durch ihren Erwartungswert ersetzen, begeht einen gravierenden Fehler. Wer so rechnet ignoriert die Tatsache, dass Investoren risikoscheu sind. Gerade weil sie Unsicherheit ablehnen, werden sie den fairen Wert niedriger als den Erwartungswert ansetzen.

Wir erkennen, dass bei der Ermittlung von fairen Preisen oder fairen Werten vom Erwartungswert Abstand genommen werden muss. In der Literatur sind mehrere Möglichkeiten bekannt, wie faire Preise bei risikoscheuen Investoren bestimmt werden. Wir werden diese Möglichkeiten jetzt nur überblicksartig behandeln können, in der Profilierungsphase bzw. im Masterstudium werden wir ausführlicher darauf eingehen. Zuvor müssen wir jedoch den Modellrahmen der Unsicherheit vorstellen.

*Modellrahmen* Konzentrieren wir uns auf die klassische Kapitalwertdefinition aus dem vorigen Abschnitt und betrachten ein Beispiel, bei dem ein Investor eine Zahlung einen Zeitpunkt später erwartet. Die Zahlung ist unsicher. Was genau heißt das?

Wenn in der Finanzwirtschaft von Unsicherheit die Rede ist, so werden damit implizit mehrere Annahmen unterstellt. Es sind die folgenden:

1. Wir nehmen an, dass im zukünftigen Zeitpunkt mehrere *Zustände* möglich sind. Zustände sind dabei Situationen, die einander ausschließen (es kann also nicht Zustand 1 und Zustand 2 gleichzeitig eintreten) und die alle denkbaren Ereignisse in der Zukunft erfassen (es kann also kein Zustand eintreten, von dem nicht vorher schon die Rede war).

2. Diesen Zuständen sind zudem Wahrscheinlichkeiten zugeordnet.

Sind diese Annahmen nicht erfüllt, so können Finanzwirte keine Antwort auf die Frage geben, wie Entscheidungen unter Unsicherheit zu treffen sind.

Man bezeichnet in der Literatur die Zustände mit dem Kleinbuchstaben[28] $s = 1, \ldots, S$, wobei wie hier vereinfachend eine endliche Anzahl von Zuständen (genau $S$ Stück) angenommen haben. Die Wahrscheinlichkeit[29] eines Zustandes $s$ erhält dann das Symbol

[28] $s$ steht für "state".

[29] $p$ steht hier für "probability".

$p(s)$. Weil alle denkbaren Zustände erfasst wurden, muss gelten

$$\sum_{s=1}^{S} p(s) \geq 1$$

und da die Zustände einander ausschließen, muss auch

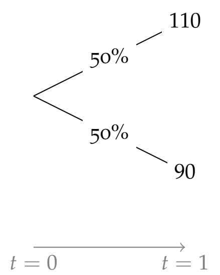
$$\sum_{s=1}^{S} p(s) \leq 1$$

erfüllt sein. Die Summe der Eintrittswahrscheinlichkeiten ergibt also genau 1.

*Beispiel 3.1:* Im folgenden konzentrieren wir uns auf ein denkbar einfaches Beispiel. Die einfachste Form der Unsicherheit besteht dann, wenn im Zeitpunkt $t = 1$ genau zwei Zustände möglich sind: $s = 1, 2$. Beide Zustände sollen auch noch gleich wahrscheinlich sein, also $p(1) = p(2) = 50\%$. Wir nehmen an, dass die Zahlung in der Zukunft im ersten Zustand 90 und im zweiten Zustand 110 betragen soll. Abbildung 8 stellt unsere bisherigen Annahmen in graphischer Form dar. Es ist leicht vorstellbar, wie dieses Modell auf mehrere Zustände verallgemeinert werden kann.

Der risikolose Zins beträgt 10%. ■

Abbildung 8: Annahmen im einfachsten Modell der Unsicherheit




*Das Stichtagsprinzip* An dieser Stelle empfiehlt es sich, auf eine Besonderheit der finanzwirtschaftlichen Modelle hinzuweisen, die in der Literatur nicht immer vollends verstanden wird.[30] Wir haben deutlich gemacht, dass in der Modellwelt zwei Zeitpunkte existieren und sich die Unsicherheit auf den zukünftigen Zeitpunkt bezieht. In $t = 1$ gibt es mehrere mögliche Zustände, von denen dann einer eintreten wird. Unser Investor hat aber bereits in $t = 0$ eine Entscheidung zu treffen, die dann seine Vermögensposition beeinflussen wird.

[30] Ein Beispiel für dieses Missverständnis liefert der Artikel von Dieter Schneider, "Finanzierungsneutralität der Besteuerung…", zfbf 61 (2009). Dort wird das gleich vorzustellende Stichtagsprinzip gerade nicht korrekt wiedergegeben. Der Autor konstruiert daraus eine grundsätzliche Kritik an der Kapitalmarkttheorie, die so nicht haltbar ist.

Es ist jedem vernünftigen Menschen klar, dass die Zukunft Überraschungen birgt, mit denen man nicht gerechnet hat. Beispielsweise haben wir uns in $t = 0$ überlegt, dass in der Zukunft die zwei verschiedenen Cashflows 90 oder 110 möglich sein werden. Durch ein unvorhersehbares Ereignis stellt sich aber in $t = 1$ nun ein Cashflow von 100 ein, mit dem niemand vorher gerechnet hat. Was nun?

Die ökonomische Theorie trifft an dieser Stelle ganz klare Aussagen, die Sie vermutlich auf den ersten Blick irritieren werden: Wir befinden uns in der Investitionsrechnung unter Unsicherheit ununterbrochen in der Gegenwart und denken nur über *die eigenen Vorstellungen* von der Zukunft nach. Wir bewegen uns dabei nicht aus der Gegenwart fort. Was in der Zukunft tatsächlich passieren wird, kann hier schon deshalb keine Rolle spielen, weil wir es in der Zukunft ja nicht mehr mit vielen denkbaren, sondern nur noch mit einem tatsächlich eingetretenen Zustand zu tun haben. Alle unsere Gedanken beziehen sich daher auf den Stichtag $t = 0$ und man spricht an dieser Stelle deshalb vom Stichtagsprinzip. Die tatsächliche Entwicklung ist nicht Gegenstand unserer Betrachtungen.