Übungsaufgaben zur Vorlesung
“Unternehmensbewertung und Steuern”

Univ.–Prof. Dr. Dr. Andreas Löffler

letzte Änderung am 7. Februar 2009

Für die Anwendungen der in der Vorlesung vermittelten Theorie ist häufig die Kenntnis weitere wichtiger steuerlicher und rechtlicher Details notwendig. Diese Details werden den Übungsaufgaben vorangestellt. Es wird von Ihnen erwartet, dass Sie sich diese Details selbstständig aneignen.

AUFGABENSET 1: STEUERN IN DEUTSCHLAND UND ANDERSWO

Aufgabe 1 Das amerikanische Einkommensteuersystem (Bundessteuer) des Jahres 2006 sieht folgende Einkommensteuertarife für Alleinstehende vor:[1]

Teilmengen des zu versteuernden Einkommens in \$	Steuersatz auf Teilmenge in %
0–7.300	10
7.301–29.700	15
29.701–71.950	25
71.951–150.150	28
150.151–326.450	33
ab 326.451	35

Zeichnen Sie analog zu Abbildung 1.2 im Skript die Durchschnitts– und Grenzsteuersätze des US–Einkommensteuertarifs.

Aufgabe 2 Gehen Sie von folgendem vereinfachten Einkommensteuertarif in Deutschland (2002) aus:

$$\mathrm{ESt} = \begin{cases} 0 & \mathrm{zvE} \le 7.235, \\ (768,85y + 1.990)y & 7.236 \le \mathrm{zvE} \le 9.251, \\ (278,65z + 2.300)z + 432 & 9.252 \le \mathrm{zvE} \le 55.007, \\ 0,485x - 9.872 & 55.008 \le \mathrm{zvE}, \end{cases}$$

wobei y ein Zehntausendstel des 7.200 € übersteigenden Teils des zu versteuernden Einkommens, z ein Zehntausendstel des 9.216 € übersteigenden Teils

1. Davon unabhängig können Arbeitnehmer den so genannten *earned income tax credit* in Anspruch nehmen: Fällt das Einkommen aus unselbständiger Tätigkeit unter etwa 11.750 \$ (und werden weitere Annahmen erfüllt), kann man vom Bund bis zu etwa 2.670\$ “negative Einkommensteuer” erhalten. Ein ähnliches System existiert in Großbritannien.

des zu versteuernden Einkommens sowie x das zu versteuernde Einkommen darstellen.

H und M (beide in Deutschland steuerpflichtig) überlegen, ob sie aus finanzwirtschaftlichen Erwägungen heiraten sollten. Berechnen Sie (ohne Kenntnis der jeweiligen zu versteuernden Einkommen) den maximal möglichen Vorteil aus dem Ehegattensplitting.

Hinweis: es wird keine allgemeine Herleitung verlangt. Eine Lösung mit Excel ist empfehlenswert.

Aufgabe 3 Betrachten Sie eine Kapitalgesellschaft mit einem Anteilseigner.

a) Ermitteln Sie diejenigen Einkommen– und Gewerbesteuersätze, bei denen der Anteilseigner indifferent zwischen Eigen– und Fremdfinanzierung ist. Nutzen Sie dabei die Überlegungen am Ende des Abschnitts 1.6.

b) Vor 2001 galt in Deutschland bei der Körperschaftsteuer ein Anrechnungsverfahren: sie wird beim Anteilseigner herausgerechnet. Er stellt sich so, als hätte er nur die Einkommensteuer bezahlt. Wiederholen Sie Teilaufgabe (a) nach dem früheren deutschen Steuersystem.

Aufgabe 4 (Wiederholung Finanzplan) Sie besitzen 10.000 €. Sie haben die Möglichkeit in zwei unterschiedliche Projekte zu investieren, die die folgenden Anfangsinvestitionen und Auszahlungen aufweisen:

Zeitpunkt	0	1	2
A	-8.000	0	10.000
B	-5.000	3.000	3.000

Der einheitliche Kredit– und Anlagezinssatz liegt bei 10%. Steuern gibt es keine.

a) Welches Projekt würden Sie durchführen?

b) Angenommen Sie möchten dieses Jahr unbedingt in Australien Urlaub machen, was 5.000 € kosten würde. Was tun Sie nun?

c) Beantworten Sie Teilaufgabe (b) unter der Annahme, dass der Zinssatz für Kredite nun bei 12% liegt. Der Zinssatz für Spareinlagen liegt weiterhin bei 10%.

Aufgabe 5 Einem Investor liegt folgende Situation vor

$$(1 + r_f)V_t < V_{t+1} + CF_{t+1}.$$

Wie kann der Investor diese Arbitragegelegenheit ausnutzen?

Aufgabe 6 *In der Vorlesung wurden nur Projekte diskutiert, die eine einmalige Investitionsauszahlung I_0 erforderten und anschließend Einzahlungen CF_t generiert haben. Im Folgenden wollen wir Projekte untersuchen, die auch in späteren Perioden Investitionsauszahlungen I_t erfordern.*

Der Investor erhält aus einer Investition I_0 in $t = 0$ frei werdende Mittel $CF_t - I_t$ in Periode t. Zeigen Sie, dass der Kapitalwert eines solchen Projektes sich in einer Welt ohne Steuern wie folgt ergibt:

$$NPV = -I_0 + \frac{CF_1 - I_1}{1 + r_f} + \frac{CF_2 - I_2}{(1 + r_f)^2} + \ldots$$

Aufgabe 7 *Die Lohnsteuer ist eine besondere Erhebungsform der Einkommensteuer; die Steuer wird direkt bei der Lohnzahlung einbehalten. Dabei gibt es für Verheiratete zwei Möglichkeiten, ihre Lohnsteuer im Verlauf eines Jahres zu wählen: Klasse III-V oder IV-IV. Beide Möglichkeiten unterscheiden sich in der Zuordnung der Freibeträge.*[2] *Die folgende Aufgabe soll für ein vereinfachtes Steuersystem diese Möglichkeiten illustrieren.*

Die Steuerzahlung eines einzeln Veranlagten ermittelt sich aus seinem Einkommen e nach Abzug eines Freibetrages a linear:

$$\text{Steuerschuld, einzeln} = \tau(e - a)^+.$$

Betrachten Sie nun ein Ehepaar mit getrennter Veranlagung, bei dem die Frau ein Einkommen von f und der Mann ein Einkommen von m (mit $f > m$) besitzen. Bei Wahl der Lohnsteuerkombination III-V wird der gesamte Freibetrag des Ehepaares der Frau zugewiesen, der Mann hat keinen Freibetrag. Die Steuerschuld lautet dann

$$\text{Steuerschuld III-V, Ehepaar} = \tau(f - 2a)^+ + \tau m.$$

2. Allerdings spart man durch die Wahl der Lohnsteuerklassen keine Steuern. Im Laufe eines Jahres zu viel gezahlte Steuer wird am Ende des Jahres erstattet. Es geht bei der Wahl der Lohnsteuerklassen nur darum, den optimalen Zeitpunkt einer Steuerzahlung zu wählen.

Bei Wahl der Lohnsteuerkombination IV-IV haben beide Eheleute den Freibetrag a. Die Steuerschuld lautet dann

$$\text{Steuerschuld IV-IV, Ehepaar} = \tau(f-a)^+ + \tau(m-a)^+.$$

a) Wählen Sie als Freibetrag $a = 1.000$ und finden Sie mit Hilfe einer Excel-Tabelle[3] heraus, bei welcher Einkommensverteilung (f, m) welche Kombination der Lohnsteuerklassen für die Eheleute von Vorteil ist.

b) Wir wollen hier eine allgemeine Lösung erarbeiten. Sie sollen zeigen, dass sich die Kombination III-V nur unter zwei Bedingungen lohnt:

- Es muss eine relativ hohe Einkommensdifferenz beider Ehepartner geben, genauer $f - m > a$ oder
- das Einkommen des besser Verdienenden muss hoch sein, genauer $f > 2a$.

Hinweis: Der Beweis muss (vermutlich) mit einer aufwendigeren Fallunterscheidung geführt werden. Wählen Sie dazu die Fälle $f > 2a$, $f < a$ und als dritten Fall $2a > f > a$, wobei der dritte Fall noch einmal unterteilt werden muss in $m > a$ und $m < a$.

3. Für den Excel-Befehl x^+ können Sie direkt in die Zelle $= \mathrm{Max}(x; 0)$ eintragen.

AUFGABENSET 2: GEWINNSTEUER

Betrachten Sie in diesem Set das Standardmodell einer Gewinnsteuer.

Aufgabe 1 Der Zinssatz sei 0%. Die Summe der Abschreibungen sei gleich der Investitionsausgabe. Zeigen Sie, dass für dieses Steuersystem $\mathrm{NPV}^{\tau} = (1-\tau)\mathrm{NPV}$ gilt und also kein Steuerparadox auftreten kann.

Aufgabe 2 Betrachten Sie eine nicht abschreibungsfähige Investition:

$t=0$	$t=1$	$t=2$	$t=3$	$t=4$
-1	0	0	0	14

Der Zins beträgt 75%. Zeichnen Sie den Verlauf der NPV–Funktion in Abhängigkeit vom Steuersatz. Liegt ein Steuerparadox vor?

Aufgabe 3 Betrachten Sie ein Projekt mit einer Laufzeit $T = 1$. Es wird die Investitionsausgabe vollständig abgeschrieben. Zeigen Sie, dass für dieses Steuersystem $NPV^{\tau} = NPV \cdot \frac{(1+r_f)(1-\tau)}{1+r_f(1-\tau)}$ gilt und also kein Steuerparadox auftreten kann.

Aufgabe 4 Sie haben eine Investition, die die folgenden Auszahlungen generiere:

Zeitpunkt	0	1	2	3	4
Cash-flow	-100	0	30	45	50

Die Investitionsausgabe wird linear über die Laufzeit abgeschrieben. Der Kalkulationszins sei 10%. Liegt ein Steuerparadox vor?

Aufgabe 5 Betrachten Sie das Beispiel in Abschnitt 2.3 des Skriptes mit den dort angegebenen Zins- und Steuersätzen.

a) Wie ändert sich der Kapitalwert des Projektes, wenn Sie nicht linear sondern degressiv abschreiben (Sie schreiben in den Jahren eins bis drei pro Jahr 50% des aktuellen Buchwertes und im Jahr vier den Restbuchwert ab)?

b) Wir betrachten wieder den Fall einer linearen Abschreibung. In den Jahren eins und zwei werden Verluste (negative Gewinne) erzielt, die jetzt nicht mehr zu einem sofortigen Verlustausgleich führen.[4] Der Verlust wird auf einem so genannten Verlustvortragskonto gesammelt; ein Gewinn wird dazu genutzt, das Verlustvortragskonto auszugleichen. Nur der Gewinn, der nicht zum Ausgleich des Verlustes benötigt wird, muss versteuert werden.

Berechnen Sie nun den Kapitalwert.

4. Im deutschen Steuerrecht kommt es in diesem Falle zu einem steuerrechtlichen Verlustvortrag. Im vorliegenden Beispiel hat dies zur Folge, dass der Verlust im Jahr eins nicht zu einer Steuererstattung im selben Jahr führt. Statt dessen mindert man das zu versteuernde Einkommen im nächsten Gewinnjahr um den Verlust des Jahres eins, der Verlust wird “vorgetragen”.

LÖSUNGSSKIZZE ZUM AUFGABENSET 1

Aufgabe 1 Die Grenzsteuersätze sind gerade die angegebenen Prozentsätze. Die Durchschnittsteuersätze ergeben sich aus:

$$\text{Differenzsteuersatz} = \frac{\text{zusätzliche Steuerschuld}}{\text{zusätzliche BMG}}$$

⇒ hier: angegebene Prozentsätze

$$\text{Durchschnittssteuersatz} = \frac{\text{gesamte Steuerschuld}}{\text{gesamte BMG}}$$

Teilmengen zvE	durchschnittl. Steuersatz
0-26250	15 %
26251-63550	$\frac{(x-26250)*0{,}28+26250*0{,}15}{x}$
63551-132600	$\frac{(x-63550)*0{,}31+(63550-26250)*0{,}28}{x}+\frac{26250*0{,}15}{x}$
132601-288350	$\frac{(x-132600)*0{,}36+(132600-63550)*0{,}31}{x}+\frac{(63550-26250)*0{,}28+26250*0{,}15}{x}$
ab 288351	$\frac{(x-288350)*0{,}396+(288350-132600)*0{,}36}{x}+\frac{(132600-63550)*0{,}31+(63550-26250)*0{,}28}{x}+\frac{26250*0{,}15}{x}$

Folie nächste Seite: Funktionsverlauf

Abbildung 5: Durchschnitts- und Grenzsteuersätze des Einkommensteuertarifs USA (Bundessteuer) 2006.

Aufgabe 2 Da im Höchststeuersatz die meisten Steuern gezahlt werden, ist vermutlich auch bei diesem Höchststeuersatz die Ersparnis durch Ehegattensplitting am größten.

$$\begin{aligned}
&\underbrace{0,485x - 9872}_{\text{einzelne Steuer}} - \underbrace{\left(2 * \left(0,485\frac{x}{2} - 9872\right)\right)}_{\text{Steuern bei Splitting}} = \text{Ersparnis} \\
=&0,485x - 9872 - 0,485x + 2 * 9872 \\
=&9872
\end{aligned}$$

ob dies tatsächlich die max. Ersparnis ist, muss erst überprüft werden ⇒ Ersparnis muss für alle Steuertarife analog berechnet werden.

Folie nächste Seite: Excel-Tabelle mit den Ergebnissen

zvE	Steuer(zvE)-2Steuer($\frac{zvE}{2}$)
10.000	614,03
11.000	851,19
12.000	1.093,92
13.000	1.342,22
14.000	1.596,09
15.000	1.734,76
16.000	1.792,32
17.000	1.847,77
18.000	1.901,10
19.000	1.953,97
20.000	2.008,31
21.000	2.065,43
22.000	2.125,34
23.000	2.188,04
24.000	2.253,52
25.000	2.321,79
26.000	2.392,85
27.000	2.466,69
28.000	2.543,32
29.000	2.622,73
30.000	2.704,93
31.000	2.789,92
32.000	2.877,70
33.000	2.968,26
34.000	3.061,61
35.000	3.157,74
36.000	3.256,66
37.000	3.358,37
38.000	3.462,86
39.000	3.570,14
40.000	3.680,21
41.000	3.793,06
42.000	3.908,70
43.000	4.027,13
44.000	4.148,34
zvE	. . .
45.000	4.272,34
46.000	4.399,13
47.000	4.528,70
48.000	4.661,06
49.000	4.796,20
50.000	4.934,13
51.000	5.074,85
52.000	5.218,36
53.000	5.364,65
54.000	5.513,73
55.000	5.665,59
56.000	5.816,99
57.000	5.965,91
58.000	6.112,05
59.000	6.255,40
60.000	6.395,97
61.000	6.533,74
62.000	6.668,73
63.000	6.800,94
64.000	6.930,36
65.000	7.056,99
66.000	7.180,83
67.000	7.301,89
68.000	7.420,16
69.000	7.535,65
70.000	7.648,35
71.000	7.758,26
72.000	7.865,39
73.000	7.969,73
74.000	8.071,28
75.000	8.170,05
76.000	8.266,03
77.000	8.359,22
78.000	8.449,63
79.000	8.537,25
zvE	. . .
80.000	8.622,08
81.000	8.704,13
82.000	8.783,39
83.000	8.859,86
84.000	8.933,55
85.000	9.004,45
86.000	9.072,57
87.000	9.137,90
88.000	9.200,44
89.000	9.260,19
90.000	9.317,16
91.000	9.371,35
92.000	9.422,74
93.000	9.471,35
94.000	9.517,17
95.000	9.560,21
96.000	9.600,46
97.000	9.637,92
98.000	9.672,60
99.000	9.704,49
105.000	9.837,32
106.000	9.849,70
107.000	9.859,30
108.000	9.866,11
109.000	9.870,14
110.000	9.871,38
111.000	9.872,00

Aufgabe 3 oE ist das operative Ergebnis vor allen Steuern.

Einkommens-und Gewerbesteuersätze bei denen Anteilseigner indifferent zwischen Eigen- und Fremdfinanzierung sind:

(a) Nach-Steuer-Zahlung [Halbeinkünfteverfahren(aktuell)]

$$= \underbrace{(1-\tau_{ESt})r_f l V_0}_{\text{Zahlung an Fk'Geber}} + \underbrace{(1-\frac{1}{2}\tau_{ESt})\underbrace{\frac{3}{4}[oE - \underbrace{\tau_{GeSt}(oE - \frac{1}{2}r_f l V_0)}_{\text{GeSt mit }\frac{1}{2}\text{Abzug der Dauerschuldzinsen}} - \underbrace{r_f l V_0}_{\text{Zinsen an Fk'Geber}}]}_{\text{Gewinn nach 25\% KSt,GeSt,Fk'Zinsen}}}_{\text{Auszahlung nach }\frac{1}{2}\text{(Halbeinkünfteverfahren)ESt, KSt, GeSt, Fk'Zinsen}\Rightarrow\text{ Zahlung an Ek'geber}}$$

Umformung ergibt:

$$\begin{aligned}
&(1-\tau_{ESt})r_f l V_0 + (1-\frac{1}{2}\tau_{ESt})\frac{3}{4}[oE - \tau_{GeSt}(oE - \frac{1}{2}r_f l V_0) - r_f l V_0] \\
=&r_f l V_0 - \tau_{ESt} r_f l V_0 + (1-\frac{1}{2}\tau_{ESt})\frac{3}{4}(oE - \tau_{GeSt} oE + \tau_{GeSt}\frac{1}{2}r_f l V_0 - r_f l V_0) \\
=&r_f l V_0 - \tau_{ESt} r_f l V_0 + \frac{3}{4}oE - \frac{3}{4}\tau_{GeSt} oE + \frac{3}{8}\tau_{GeSt} r_f l V_0 - \frac{3}{4}r_f l V_0 \\
&-\frac{3}{8}oE\tau_{ESt} + \frac{3}{8}\tau_{ESt}\tau_{GeSt} oE - \frac{3}{16}\tau_{ESt}\tau_{GeSt} r_f l V_0 + \frac{3}{8}\tau_{ESt} r_f l V_0 \\
=&\frac{3}{4}oE(1 - \tau_{GeSt} - \frac{1}{2}\tau_{ESt} + \frac{1}{2}\tau_{ESt}\tau_{GeSt}) + \frac{r_f l V_0}{16}(4 - 10\tau_{ESt} + 6\tau_{GeSt} - 3\tau_{ESt}\tau_{GeSt}) \\
=&(1-\frac{1}{2}\tau_{ESt})(1-\tau_{GeSt})\frac{3}{4}oE + \underbrace{(4 - 10\tau_{ESt} + 6\tau_{GeSt} - 3\tau_{ESt}\tau_{GeSt})}_{\text{Indifferenz zw. Kapitalstrkt. ergibt sich aus Vorzeichen}}\frac{r_f l V_0}{16}
\end{aligned}$$

$$4 - 10\tau_{ESt} + 6\tau_{GeSt} - 3\tau_{GeSt}\tau_{ESt} = 0$$

$$\tau_{GeSt} = \frac{10\tau_{ESt} - 4}{6 - 3\tau_{ESt}}$$

(b) Nach-Steuer-Zahlungen [Anrechnungsverfahren]

$$= \underbrace{(1-\tau_{ESt})r_f l V_0}_{\text{Zahlung an Fk'Geber}} + \underbrace{[(1-\tau_{ESt})\underbrace{\underbrace{[oE - \underbrace{\tau_{GeSt}(oE - \frac{r_f l V_0}{2})]}_{\text{GeSt mit Abzug von }\frac{1}{2}\text{Dauerschuldzinsen}} - \underbrace{r_f l V_0]}_{\text{Fk'Zinsen}}}_{\text{Gewinn nach GeSt und Fk'Zinsen}}}_{\text{ESt auf Gewinn }\to\text{ GeSt abzugsfähig}}}_{\text{Auszahlung an EK'Geber}}$$

Umformen ergibt:

$$
\begin{aligned}
=&(1-\tau_{ESt})r_f l V_0 + (1-\tau_{ESt})[oE - \tau_{GeSt}oE + \tau_{GeSt}\frac{r_f l V_0}{2} - r_f l V_0]\\
=&(1-\tau_{ESt})r_f l V_0 + oE - \tau_{GeSt}oE + \tau_{GeSt}\frac{r_f l V_0}{2} - r_f l V_0 - \tau_{ESt}oE + \tau_{ESt}\tau_{GeSt}oE\\
&-\tau_{ESt}\tau_{GeSt}\frac{r_f l V_0}{2} + \tau_{ESt} r_f l V_0\\
=&r_f l V_0 - \tau_{ESt} r_f l V_0 + oE - \tau_{GeSt}oE + \tau_{GeSt}\frac{r_f l V_0}{2} - r_f l V_0 - \tau_{ESt}oE + \tau_{ESt}\tau_{GeSt}oE\\
&-\tau_{ESt}\tau_{GeSt}\frac{r_f l V_0}{2} + \tau_{ESt} r_f l V_0\\
=&(1-\tau_{ESt})\tau_{GeSt}\frac{r_f l V_0}{2} + (\tau_{ESt}-1)\tau_{GeSt}oE - \tau_{ESt}oE + oE\\
=&(1-\tau_{ESt})\tau_{GeSt}\frac{1}{2}r_f l V_0 + \underbrace{(1-\tau_{ESt})(1-\tau_{GeSt})oE}
\end{aligned}
$$

$$
= \underbrace{(1-\tau_{ESt})\tau_{GeSt}\frac{1}{2}r_f l V_0}_{\text{muß verschwinden}} + (1-\tau_{ESt})(1-\tau_{GeSt})oE
$$

Indifferenz wird wieder genau dann erzielt, wenn der erste Term verschwindet. Das ist nur der Fall, wenn $\tau_{ESt} = 100\%$ (bei $\tau_{GeSt} = 0$).

Aufgabe 4 *(a)* Die NPV der Projekte sind: NPV(A)=264,5 und NPV(B)=206,6. Also sollte Projekt A durchgeführt werden.

(b) Das Anfangsbudget hat keinen Einfluss auf die Projekte. Deshalb wird man auch in diesem Fall Projekt A durchführen und sich das restliche Geld borgen.

Exkurs:

	t=0	t=1	t=2
Investition	-8.000	0	+10.000
Kredit	+3.000	-3.000	-3.000
		-300	-600
			-30
	5000		6370

$$NPV^{\text{mit Kredit}} = -5000 + \frac{6370}{1,1^2} = 264,46$$
$$NPV^{\text{ohne Kredit}} = -8000 + \frac{10000}{1,1^2} = 264,46$$

Grund:
3000 Kredit wird erst mit 10% verzinst und dann mit 10% diskontiert → kann man weglassen/kürzt sich raus.

(c) Kreditzins: 12%
Sparzins: 10%
Folge: Fisher-Separation gilt nicht mehr!

Exkurs Fisher-Separation:

- Voraussetzung:
  - Sollzinsen=Habenzinsen
  - Möglichkeit zur Realinvestition
- Separation:
  folgende Entscheidungen können getrennt voneinander getroffen werden:
  - Entscheidungen über die Durchführung einer Realinvestition (ist $NPV > 0$, dann durchführen)
  - Entscheidung über optimalen Konsumplan (abhängig von subjektiver Zeitpräferenz des Entscheidungsträgers)
- Situation
  - Investoren bewegen sich nicht mehr auf einer 'optimalen' Transaktionsgrade
  - Es kann kein Barwert mehr berechnet werden, die Entscheidungen müssen anhand eines Finanzplans getroffen werden
  - Projekt A:

	t=0	t=1	t=2	
Investition	-8.000	0	+10.000	
Kredit	+3.000	-3.000	-3.000	Tilgung
		-360	-360	Zins von t=1
			-360	Zins t=2
			-43,2	Zinseszins auf t=1
			6236,88	

– Projekt B:

	t=0	t=1	t=2	
Investition	-5.000	3.000	3.000	
Kredit	0			
Anlage		3000	3000	CF von t=1
			300	Zins
			6300	

$$\text{Unterlassung} = 5000 * 1.1^2 = 6050$$

→ wähle Projekt B

Aufgabe 5 Die vorliegende Gleichung ist eine Arbitragegleichung. In dieser Gleichung hat die sichere Finanzmarktanlage einen geringeren Wert als die sichere Realinvestition. Folglich ist der Markt nicht arbitragefrei.

Der Investor kann durch geschicktes ausnutzen der ungleichen Werte potenziell unendlich reich werden. Folgendes kann der Investor tun

Zeitpunkt		t	$t+1$
Finanzinvestition	verkaufe	$+V_t$	$-(1+r_f)V_t$
Realinvestition	kaufe	$-V_t$	$+(V_{t+1}+CF_{t+1})$
Summe		0	$(V_{t+1}+CF_{t+1})-(1+r_f)V_t$ = Gewinn

Durch diese Transaktionen erhält der Investor in $t+1$ Geld, ohne dafür im Zeitpunkt t etwas bezahlt zu haben. Führt der Investor die Investitionen in der oben angegebenen Weise unendlich mal durch, kann er unendlich reich werden.

Aufgabe 6 Die Arbitrage-Gleichung lautet:

$$\begin{aligned}
V_t(1+r_f) &= V_{t+1} + CF_{t+1} - I_{t+1} \\
V_t &= \frac{V_{t+1} + CF_{t+1} - I_{t+1}}{1+r_f} \\
V_{t+1}(1+r_f) &= V_{t+2} + CF_{t+2} - I_{t+2} \\
V_t &= \frac{V_{t+2} + CF_{t+2} - I_{t+2}}{(1+r_f)} \frac{1}{(1+r_f)} + \frac{CF_{t+1} - I_{t+1}}{(1+r_f)} \\
&= \frac{CF_{t+1} - I_{t+1}}{(1+r_f)} + \frac{V_{t+2} + CF_{t+2} - I_{t+2}}{(1+r_f)^2} \\
&\vdots
\end{aligned}$$

und damit ergibt sich die Behauptung durch wiederholtes Einsetzen.

Aufgabe 7 a) Klar.

b) Wir vergleichen die Steuerzahlungen in beiden Kombinationen. Wenn wir nicht wissen, welche Kombination eine höhere Steuerzahlung erzielt, schreiben wir zuerst ein Fragezeichen und formen nur äquivalent um. Es gibt insgesamt drei Fälle, wobei der dritte Fall noch einmal unterteilt wird

Fall 1 ($a > f$, beide verdienen wenig) Hier ist IV-IV immer besser, denn

$$\begin{aligned}
\text{IV-IV} &< \text{III-V} \\
\tau(f-a)^+ + \tau(m-a)^+ &< \tau(f-2a)^+ + \tau m \\
0 + 0 &< 0 + \tau m
\end{aligned}$$

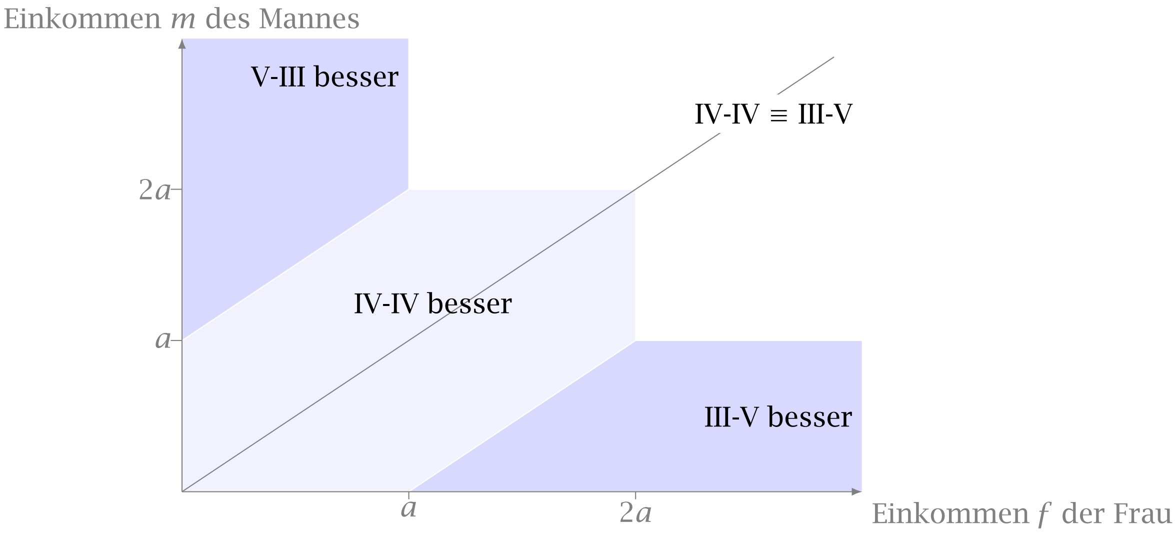
was immer erfüllt ist. Insbesondere ist keine der beiden Bedingungen erfüllt, denn auch die Differenz der Einkommen ist $f - m < a$.

Fall 2 ($f > 2a$, einer verdient viel) Jetzt

$$\begin{aligned}
\text{IV-IV} &> \text{III-V} \\
\tau(f-a)^+ + \tau(m-a)^+ &> \tau(f-2a)^+ + \tau m \\
f - a + (m-a)^+ &> f - 2a + m \\
(m-a)^+ &> m - a
\end{aligned}$$

was immer erfüllt ist. Wir sehen auch, dass für $m > a$ beide Lohnsteuer-Kombinationen zu identischen Steuerzahlungen führen.

Abbildung 6: optimale Wahl der Lohnsteuerklassen



Fall 3 ($2a > f > a$) Hier kommt es jetzt darauf an, wie hoch das Einkommen des Mannes ist.

Nehmen wir zuerst an, dass $a > m$ gilt. Dann

$$\begin{aligned}\text{IV-IV} &\ ?\ \text{III-V}\\ \tau(f-a)^+ + \tau(m-a)^+ &\ ?\ \tau(f-2a)^+ + \tau m\\ f-a+0 &\ ?\ 0+m\end{aligned}$$

Die Kombination III-V lohnt sich genau dann, wenn $f - m > a$ ist. Das aber hatten wir behauptet.

Oder aber es gilt $m > a$. Dann folgt

$$\begin{aligned}\text{IV-IV} &< \text{III-V}\\ \tau(f-a)^+ + \tau(m-a)^+ &< \tau(f-2a)^+ + \tau m\\ f-a+m-a &< 0+m\\ f &< 2a\end{aligned}$$

was immer gilt und damit ist hier IV-IV besser.

Die Grafik **??** fasst unsere Überlegungen zusammen.