Aufgaben zu Kapitel 6

1. Überführen Sie die Regeln für die Realisierung der Projekte im Abschnitt „Logische Verknüpfungen von Aussagen“ in eine algebraische Darstellung
2. Transformieren Sie die log. Formeln des Grünfan-Beispiels in KNF und überführen Sie diese in das algebraische Modell. Welche Unterschiede ergeben sich zur ursprünglichen Formulierung?
3. Die Kundenbelieferung von einem Zentrallager eines Versandhändlers wird durch Spediteure durchgeführt. Deutschland ist in Kundenregionen aufgeteilt. Jeder Kunde ist genau einer Kundenregion zugeordnet, die wiederum von genau einem Spediteur bedient wird. Ein Spediteur kann mehrere Kundenregionen beliefern. Die Transportkosten für eine Mengeneinheit sind fest und hängen vom Spediteur und der Kundenregion ab. Die Transportmenge aller Kunden einer Kundenregion ist als (prognostizierter) Wert vorgegeben. Jeder Spediteur bietet ab einer bestimmten Transportmenge über alle Kundenregionen einen Bonus an.

   Es soll ein lineares gemischt-ganzzahliges Modell erstellt werden, das die kostengünstigste Belieferung der Kundenregionen ermöglicht. Es gilt festzulegen, welche Kundenregion von welchem Spediteur beliefert werden soll.

   Daten
   - Indexmengen: K: Kundenregionen, S: Spediteure.
   - Indexe: k: Kundenregion, s Spediteur
   - c_{ks}: Transportkosten für eine Mengeneinheit vom Spediteurs s in die Kundenregion k [GE/ME]
   - b_k: prognostizierte Transportmenge in die Kundenregion k [ME]
   - m_s : Mindestmenge [ME] ab der Spediteur s liefert
   - l_s : Transportmenge, ab der Spediteur s einen Bonus gewährt [ME]
   - t_s: Bonus des Spediteurs s [GE]

   Entscheidungsvariablen
   - y_{ks} =1, wenn Kundenregion k vom Spediteur s beliefert wird; sonst 0.
   - x_s =1, wenn ein Bonus des Spediteurs s gewährt wird; sonst 0.
   - z_s = 1, wenn Mindestmenge erreicht wird, 0 sonst

Lösung für Aufgabe 1

1. $p_1 \vee p_2$ $\quad y_1 + y_2 \geq 1$
2. $p_1 \rightarrow p_2$ $\quad y_1 - y_2 \leq 0$
3. $(p_1 \wedge \neg p_2) \otimes (\neg p_1 \wedge p_2)$ $\quad y_1 + y_2 \leq 1 \wedge y_1 + y_2 \geq 1$, also $y_1 + y_2 = 1$
4. $\neg(p_1 \wedge p_2)$ $\quad y_1 + y_2 \leq 1$
5. $p_2 \rightarrow p_1$ $\quad y_2 - y_1 \leq 0$
6. $p_1 \rightarrow (p_2 \vee p_3)$ $\quad - y_1 + y_2 + y_3 \geq 0$
7. $(p_1 \wedge p_2) \rightarrow p_3$ $\quad y_1 + y_2 - y_3 \leq 1$
8. $p_3 \rightarrow (p_1 \wedge p_2)$ $\quad y_1 - y_3 \geq 0$ und $y_2 - y_3 \geq 0$
9. $p_3 \leftrightarrow (p_1 \wedge p_2)$ $\quad y_1 + y_2 - y_3 \leq 1$ und $y_1 - y_3 \geq 0$ und $y_2 - y_3 \geq 0$

Lösung für Aufgabe 2

- **Nur die 3. Regel $(\neg h \wedge \neg b \wedge s) \vee k$ ist noch nicht in KNF.**
- **Wir transformieren sie durch Anwendung des Distributivgesetzes: $(\neg h \vee k) \wedge (\neg b \vee k) \wedge (s \vee k)$**
- **Diese äquivalente Regel ist in KNF**
- **Die entsprechende algebraische Darstellungen lauten: $1-H + K \geq 1$, $1-B + K \geq 1$, $S+K \geq 1$**
- **Vereinfacht: $K-H \geq 0$, $S+K \geq 1$, $K-B \geq 0$**
- **Wir hatten früher nur eine Restriktion: $S + 3K - B - H \geq 1$**
- **Diese eine Restriktion ist schwächer (aggregiert) im Hinblick auf eine strenge LP-Relaxierung**
- ***Anmerkung*: Restriktion Nr. 1 der ursprünglichen Modell-formulierung lautet: $K-H \leq 0$; zusammen mit der obigen Restriktion $K-H \geq 0$ folgt demnach $K-H = 0$, also $K = H$; diese Bedingung muss also in einer zulässigen Lösung erfüllt sein!**

Lösung für Aufgabe 3

Zielfunktion

minimiere $\sum_{k\in K}\sum_{s\in S} c_{ks} b_k y_{ks} - \sum_{s\in S} t_s x_s$

Bedarfsdeckung

$$\sum_{s\in S} y_{ks} = 1, k \in K$$

Bonus

$$\sum_{k\in K} b_k y_{ks} \geq l_s x_s, s \in S$$

Mindestmenge

$$\sum_{k\in K} b_k y_{ks} \geq m_s z_s, \sum_{k\in K} b_k y_{ks} \leq z_s \left(\sum_{k\in K} b_k\right), s \in S$$

Variablentypen

$$y_{ks} \in \{0,1\}, k \in K, s \in S$$

$$x_s, z_s \in \{0,1\}, s \in S$$