Kapitel 6

Mathematische Optimierungsmodelle

Modellierungstechniken

Uwe H. Suhl
Lehrstuhl für Wirtschaftsinformatik
Freie Universität Berlin

Optimierungssysteme
Version 1.1 / SS 2008

6. Modellierungstechniken

- Innerhalb eines LP/IP-Modells müssen manchmal Anforderungen abgebildet werden, die spezielle Modellierungstechniken erfordern
- Die Modellierungstechniken erfordern häufig die Einführung zusätzlicher (künstlicher) reeller oder 0-1 Variablen und Restriktionen
- mehrere Techniken können in einem Modell kombiniert werden
- In diesem Kapitel steht die logisch korrekte Modellierung im Vordergrund
- später wird die Modellierung von IP-Modellen unter dem Aspekt der Lösungseffizienz betrachtet
- Folgende Modellierungstechniken werden betrachtet
  - Bilanzgleichungen
  - Weiche Restriktionen
  - Diskrete Werte und Beschränkung von Variablen
  - Indikatorvariablen
  - Schwellenwerte und Fixkostenprobleme
  - Reihenfolgerestriktionen für Aktivitäten
  - Terminierung von Aktivitäten
  - Alternative Restriktionen
  - Spezielle Nichtlinearitäten
  - Stückweise Linearisierung separabler Funktionen
  - Logische Verknüpfungen von Aussagen, Konjunktive Normalform

Bilanzgleichungen

- In mehrperiodischen Modellen müssen meistens Lagerbilanzgleichungen modelliert werden
- Der Lagerbestand l_{it} eines Produktes i am Ende von Periode t ergibt sich aus dem Lagerbestand l_{it-1} der Vorperiode plus den Zugängen p_{it} in Periode t minus den Abgängen v_{it} in Periode t
- p_{it} steht für die Produktion von Produkt i in Periode t, die jedoch auch eine einzukaufende Menge darstellen kann
- v_{it} steht für den Verkauf von Produkt i in Periode t
- l_{it}, p_{it} und v_{it} sind für jedes i und t > 1 Entscheidungsvariablen; für t = 1 bezeichnet l_{i0} den Anfangsbestand (Konstante)
- Man muss Annahmen über die zeitliche Sequenz von Produktion und Verkauf innerhalb einer Periode t treffen
- Die Bilanzgleichung lautet: $l_{it} = l_{it-1} + p_{it} - v_{it}$ für jedes i und jedes t im Planungshorizont; äquivalent ist $l_{it}= l_{i0}+ \Sigma_{r=1,..t} (p_{ir} - v_{ir})$
- die einzelnen Perioden können unterschiedlich lang sein; p_{it} und v_{it} müssen dann entsprechend definiert sein
- Bilanzgleichungen können in Finanzplanungsmodellen auch für das Produkt Kapital eines Kontos aufgestellt werden

Weiche Restriktionen (soft constraints)

- bei „weichen Restriktionen“ muss deren rechte Seite nicht unbedingt eingehalten werden, sondern darf zu gegebenen Bedingungen über- oder unterschritten werden (z.B. die verfügbare Anzahl Arbeitsstunden, oder Maschinenlaufzeiten)
- Die Originalrestriktion kann eine Gleichung oder Ungleichung sein
- durch Überstunden bzw. Prämien kann eine Über- oder Unterschreitung ermöglicht werden
- Die Variable v erlaubt die Überschreitung, u die Unterschreitung der rechten Seite bi
- u und v müssen mit entsprechenden Koeffizienten in die Zielfunktion eingehen:

$$u \text{ und v sind reelle Variablen} \geq 0$$

$$\sum_j a_j x_j \leq b \Rightarrow \sum_j a_j x_j - v \leq b; \; \sum_j a_j x_j \geq b \Rightarrow \sum_j a_j x_j + u \geq b;$$

$$\sum_j a_j x_j = b \Rightarrow \sum_j a_j x_j + u - v = b$$

$$Zielfunktion + c\,u + d\,v, wobei \text{ c, d} > 0 \text{ bei Min und c, d} < 0 \text{ bei Max}$$

Diskrete Werte und Beschränkung von Variablen

- **Eine Variable x darf nur Werte aus einer gegebenen Menge $\{a_1,\dots,a_k\} \subset R$ annehmen**
- **Lösung: es werden k 0-1-Variablen y_j und folgende Restriktionen definiert**

$$\mathbf{x} = \sum_{j=1}^{k} a_j\, y_j, \quad \sum_{j=1}^{k} y_j = 1, \quad y_j \in \{0,1\}$$

- **aus einer Menge von reellen Variablen $x_1,\dots x_n$ mit oberen Schranken $o_j>0$ sollen mindestens l und höchstens u Variablen einen Wert > 0 annehmen**
- **Anforderungen dieser Art kommen bei einigen Mischungsproblemen vor, bei denen die x_i Mischungsanteile repräsentieren, d.h. $\Sigma\, x_j = 1$**
- **Lösung: es werden 0-1-Variablen y_j, j =1,...,n definiert und folgende Restriktionen dem Modell hinzugefügt**
  - **$x_j \le y_j\, o_j$**
  - **$l \le \Sigma\, y_j \le u$**
- **Die Technik kann mit Schwellenwerten (⇒) kombiniert werden**

Indikatorvariablen

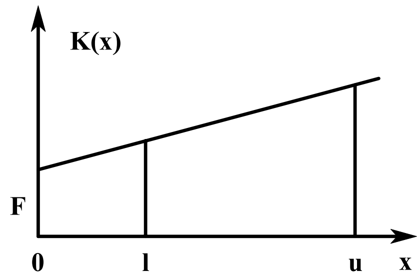
- **Eine (reelle) Entscheidungsvariable mit dem Wertebereich $0 \le x \le u$ soll eine 0-1-Indikatorvariable y auf 1 setzen, wenn $x > 0$; ist $y = 1$, dann ist $x = 0$ ebenfalls zulässig**
- ***Lösung*: $x \le u\, y$**
- **Eine (reelle) Entscheidungsvariable mit dem Wertebereich $l \le x \le u$ soll eine 0-1-Indikatorvariable y dann und nur dann auf 1 setzen, wenn $x \ge a$, wobei $l \le a \le u$; ist $x < a$ dann soll $y = 0$ gelten.**
- ***Lösung*: eine kleine reelle Zahl $\varepsilon > 0$ wird benutzt um $x < a$ durch $x \le a - \varepsilon$ zu ersetzen: $x \ge a\, y$ und $x \le a - \varepsilon + (u - a + \varepsilon)\, y$**
- **Anwendungsbeispiel: Ein Lieferant gewährt beim Erreichen der Einkaufs-summe von 100000 GE für gekaufte Teile einen fixen Bonus von 2000 GE**
- ***Lösung*: Einführung einer 0-1-Variable z und folgende Restriktionen**

$$\sum_{i\in I} x_i p_i \ge 100000\, z, \quad \sum_{i\in I} x_i p_i \le 99999 + M\, z, \quad \text{ZF (min)}: \dots - 2000\, z$$

- **Bemerkung: wenn Bonus > 0, dann kann bei Minimierung der zweite Term entfallen**

Schwellenwerte und Fixkostenprobleme

- Bei manchen Produktions- oder Transportprozessen ist eine Mindestmenge $l>0$ gefordert, d.h. $x \geq l$, die im LP über eine untere Schranke realisiert wird
- Wenn jedoch entweder $x = 0$ oder $x \geq l$ gelten muss, dann liegt eine Nichtlinearität vor, die nicht im LP-Modell modelliert werden kann
- Lösung: es wird eine 0-1-Variable y und eine Restriktion $x \geq l\,y$ eingeführt
- Fixkostenproblem: die Kostenfunktion $K(x)$ ist definiert: $K(x) = 0$ für $x = 0$; ist $x > 0$, dann fallen Fixkosten $F > 0$ und variable Kosten c an, d.h. $K(x) = F + c\,x$
- K ist also eine nichtlineare Funktion
- Lösung: es wird eine 0-1-Variable y eingeführt; die Funktion $K'(x,y)$ ersetzt $K(x)$: $K'(x,y) = c\,x + F\,y$, weiterhin wird die Restriktion $x \leq u\,y$ benötigt, wobei u eine (möglichst kleine) obere Schranke für x ist; K' ist jetzt linear



- Modifizierter Fall: $x = 0$ oder $x \geq l$ und $x \leq u$: $x \leq u\,y$, $x \geq l\,y$

Reihenfolgerestriktionen für Aktivitäten

- Innerhalb eines LP/IP-Modells seien k (reelle) Variablen mit positiven oberen Schranken $u_1,\ldots,u_k$ gegeben
- Die Aktivitäten müssen in einer bestimmten Reihenfolge ausgeführt werden, die o.B.d.A. in der Ordnung der Indizes angenommen wird
- Weiterhin muss gelten: ist $x_i > 0$, für $i \in \{2,\ldots,k\}$ dann muss für alle $j \in \{1,i-1\}$ $x_j = u_j$ gelten
- Lösung: es werden 0-1-Variablen $y_1,\ldots,y_k$ eingeführt und folgende Restriktionen
  - $x_i - u_i\,y_i \geq 0$, für $i = 1,\ldots, k-1$
  - $x_i - u_i\,y_{i-1} \leq 0$, für $i = 2,\ldots, k$
- Anwendungsbeispiel: in einem mehrstufigen Distributionssystem kann ein Zentrallager in der Kapazität vergrößert werden; zu berücksichtigen sind:
  - Die Kapazität kann in verschiedenen Bauabschnitten vergrößert werden
  - In jedem Abschnitt ist die Kapazität in gewissen Grenzen veränderlich
  - Bei der Erhöhung um einen Abschnitt müssen zusätzliche Baumaßnahmen eingeplant werden, die zusätzliche Kosten verursachen

Terminierung von Aktivitäten

- Zwei Variablen x_1 und x_2 beschreiben Aktivitäten in einem diskreten Planungshorizont $T = \{1,...,n\}$, $T_0=\{0\}\cup T$
- Die reellen Variablen x_1, x_2 haben obere Schranken u_1 und u_2
- Weiterhin gilt
  - $x_1 > 0 \Leftrightarrow x_2 > 0$
  - Wenn $x_1 > 0$, so muss die Periode in der $x_1 > 0$ ist mindestens k Perioden vor der Periode liegen in der $x_2 > 0$ ist
  - k ist eine feste natürliche Zahl mit $k \geq 1$
- Wie sieht eine Lösung dieses Problems aus?
  - Es werden 0-1-Variablen $y1_0$, $y2_0$ eingeführt, wobei gilt $y1_0= 1 \Leftrightarrow x_1=0$, $y2_0= 1 \Leftrightarrow x_2=0$
  - die 0-1-Variablen $y1_i$ und $y2_i$, $i\in T$ geben *ggf.* an, in welchen Perioden x_1, $x_2 > 0$ sind
  - Weiterhin sei $\varepsilon > 0$ eine kleine reelle Zahl (vgl. Folie Indikatorvariablen)

$$
\begin{aligned}
&\sum_{t\in T_0} y1_t = 1, \quad \sum_{t\in T_0} y2_t = 1, \quad y1_0 = y2_0 \\
&y2_0 * k + \sum_{t\in T} t * y2_t \geq k + \sum_{t\in T} t * y1_t \\
&x_1 \leq (\sum_{t\in T} y_{1t})\, u_1, x_2 \leq (\sum_{t\in T} y_{2t})\, u_2 \\
&x_1 \geq (1-y1_0)\,\varepsilon, \quad x_2 \geq (1-y2_0)\,\varepsilon \\
&y1_t, y2_t \in \{0,1\}, t \in T_0
\end{aligned}
$$

Alternative Restriktionen

- Zwei Produkte können auf genau einer von zwei Maschinen produziert werden
- die Maschinen haben unterschiedliche Eigenschaften
- Diese Problemstellung ist nichtlinear und erfordert die Einführung von 0-1-Variablen als Indikator welche Restriktionenmenge benutzt werden soll
- Lösung

$$
\begin{aligned}
&\text{Zielfunktion}: \textit{Maximiere } x_1 + 2x_2 \\
&\text{Maschine 1}: \quad x_1 + 5x_2 \leq 10, \qquad x_1 + x_2 \leq 6 \\
&\text{Maschine2}: 2x_1 + 5x_2 \leq 20, \qquad 2x_1 + x_2 \leq 6 \\
&0-1-\text{Variablen } y_j : y_j = 1\, \textit{nur} \text{ wenn Maschine j benutzt wird} \\
&y_1 + y_2 = 1, \ \textit{M sei hinreichend große Zahl} \\
&x_1 + 5x_2 \leq 10 + M\,(1-y_1), \quad 2x_1 + 5x_2 \leq 20 + M\,(1-y_2) \\
&x_1 + \ \ x_2 \leq \ \ 6 + M\,(1-y_1), \quad 2x_1 + \ x_2 \leq \ \ 6 + M\,(1-y_2)
\end{aligned}
$$

Spezielle Nichtlinearitäten

- x_1 und x_2 seien reelle Variablen ≥ 0 und y eine 0-1-Variable; es soll gelten $x_1 = x_2$ wenn $y = 1$ und $x_1 = 0$, wenn $y = 0$
- Der Ausdruck $x_1 = x_2\, y$ erreicht dies, ist jedoch nichtlinear
- Lösung durch folgende 0-1-Variablen und Restriktionen
  - u_1 sei eine obere Schranke für x_1, u_2 die für $x_1 - x_2$, u_3 die für $x_2 - x_1$
  - $x_1 \leq u_1 y$, $x_1 - x_2 \leq u_2 (1-y)$, $x_2 - x_1 \leq u_3 (1-y)$
- Anwendung: wenn eine Bedingung gilt ($y = 1$), dann soll ein Kredit gewährt werden: Kredit_{neu}(variabel) = Kreditlimit (variabel) – Kredit_{alt} (variabel)
- Modellierung der Funktion $z = \max (x_1, x_2)$, $x_1, x_2 \geq 0$
- Lösung durch eine 0-1-Variable y, reelle Variable z und Restriktionen:
  - $z = \max (x_1, x_2)$ bedeutet $x_1 \leq z$ und $x_2 \leq z$ sowie $x_1 \geq z$ *oder* $x_2 \geq z$
  - $x_1 \leq z$, $x_2 \leq z$, $z - x_1 \leq u_1 (1-y)$, $z - x_2 \leq u_2\, y$
- Modellierung von $y_3 = y_1 \cdot y_2$, wobei y_1, y_2 und y_3 0-1-Variablen sind
- Lösung durch folgende Restriktionen
  - $y_3 \leq y_2$
  - $y_3 - y_1 \leq 1 - y_2$
  - $y_1 - y_3 \leq 1 - y_2$

Stückweise Linearisierung separabler Funktionen

- Eine Funktion der Form $f(x_1,x_2,..,x_k) = f_1(x_1)+f_2(x_2)..+f_k(x_k)$ heißt separabel
- Jede stetige Funktion $f_i(x_i)$ kann beliebig genau durch eine stückweise Linearisierung approximiert werden
- Nichtlinearitäten können sowohl in der Zielfunktion als auch in den Restriktionen auftreten
- Stückweise lineare *Zielfunktionen* die konvex (konkav) sind, können durch LP minimiert bzw. maximiert werden; das gilt andernfalls nicht!
- Gegeben sei *eine* nichtlineare Funktion f mit *einer* Variablen x, die durch eine Funktion f^* mit k+1 Werten $(a_i,f(a_i))$ im Intervall $a_0, a_1, ..., a_k$ linear approximiert wird
- Zur Modellierung werden k kontinuierliche Variablen z_i und 0-1-Variablen y_i definiert und es gelten folgende Restriktionen

$$x = a_0 + \sum_{i=1}^{k} z_i$$

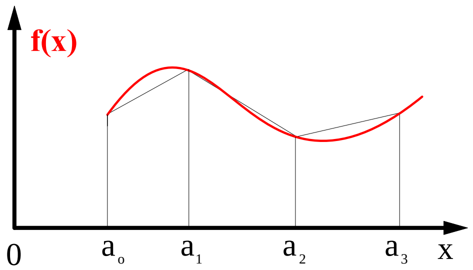
$$f^*(x) = b_0 + \sum_{i=1}^{k} \frac{b_i - b_{i-1}}{a_i - a_{i-1}} z_i$$

$$z_i \geq 0 \quad \text{für alle } i \in \{1,..,k\}$$

$$z_1 \leq a_1 - a_0$$

$$z_i \geq (a_i - a_{i-1})y_i,\ z_{i+1} \leq (a_{i+1} - a_i)y_i$$

$$\text{für alle } i \in \{1,..,k\text{-}1\} \text{ mit } y_i \in \{0,1\}$$



- Die Linearisierung kann mit Fixkosten K_i für die einzelnen Segmente gekoppelt werden: in die Zielfunktion muss nur der Term $y_i * K_i$ aufgenommen werden

Beispiel zur stückweisen Linearisierung

- Der Kaufpreis eines Teils ist von dessen Einkaufsmenge x abhängig: [0, 5000]: 0,25 €/ME, [5000, 8000]: 0,30 €/ME, [8000, 16000]: 0,15 €/ME
- Mit künstlichen reellen Variablen $z_1,..,z_3$ und 0-1-Variablen $y_1,...,y_3$ wird diese nichtlineare Funktion also folgendermaßen modelliert:
- $a_0 = 0$, $a_1 = 5000$, $a_2 = 8000$, $a_3 = 16000$
- $x = z_1 + z_2 + z_3$; die z_i repräsentieren die Werte in jedem Intervall $[a_{i-1},a_i]$
- Die Steigungen $(b_i - b_{i-1}) / (a_i - a_{i-1})$ in den Segmenten müssen in diesem Fall nicht berechnet werden, da die Teilkosten bereits gegeben sind
- $f^*(x) = 0.25\ z_1 + 0.30\ z_2 + 0.15\ z_3$
- Um die richtige Darstellung der Funktion f* zu gewährleisten sind 0-1-Variablen y_1, y_2, y_3 und folgende Restriktionen erforderlich:

  $z_1 \leq 5000$, $z_1 \geq 5000\ y_1$

  $z_2 \leq 3000\ y_1$, $z_2 \geq 3000\ y_2$

  $z_3 \leq 8000\ y_2$
- *Eine andere Möglichkeit der stückweisen Linearisierung sind Special Ordered Sets vom Typ2, die von fast allen MIP-Solvern unterstützt werden.*

Logische Verknüpfungen von Aussagen

- Beispiel: In einem Planungsproblem werden drei Projekte P1, P2 und P3 in Betracht gezogen; Aus betrieblichen Gründen könnten Anforderungen an die Planung gestellt werden, z.B. der Form:
  1. P1 oder P2 muss durchgeführt werden, d.h. mindestens eines der beiden Projekte P1 und P2 muss durchgeführt werden
  2. P2 muss durchgeführt werden, wenn P1 durchgeführt wird.
  3. Entweder P1 oder P2 muss durchgeführt werden (exklusives Oder), d.h. genau eines der beiden Projekte P1 und P2 muss durchgeführt werden
  4. P1 und P2 können nicht gemeinsam bearbeitet werden
  5. P2 kann nur durchgeführt werden, wenn P1 durchgeführt wurde.
  6. P1 kann nur mit P2 oder P3 zusammen durchgeführt werden.
  7. Wenn P1 und P2 beide durchgeführt werden, dann muss auch P3 durchgeführt werden.
  8. Wenn P3 durchgeführt wird, dann müssen sowohl P1 als auch P2 durchgeführt werden.
  9. P3 muss dann und nur dann durchgeführt werden, wenn P1 und P2 beide durchgeführt werden.
- Solche Anforderungen können *aussagenlogisch* modelliert werden und anschließend in äquivalente *algebraische Ungleichungen* umgeformt werden
- Dabei wird für jede einzelne atomare Aussagen (wahr oder falsch) eine entsprechende 0-1-Variable eingeführt

Syntax und Semantik logischer Aussagen und Formeln

- eine logische Aussagen p ist entweder wahr oder falsch (2-wertige Logik)
- Für logische Aussagen p, p_1, p_2 können folgende *logische Operatoren* definiert werden
  - Negation $\neg p$ nicht p
  - Konjunktion $p_1 \wedge p_2$ p_1 und p_2
  - Disjunktion $p_1 \vee p_2$ p_1 oder p_2 oder beides
- Die Verknüpfung logischer Aussagen durch diese Operatoren erzeugt eine neue ggf. *zusammengesetzte logische Aussage*, die auch *Formel* genannt wird
- Weitere logische Operatoren sind *Implikation*, *Äquivalenz* und *exklusives oder*, die durch die obigen Operatoren definiert werden können
  - logische Implikation $p_1 \rightarrow p_1$ aus p_1 folgt p_2: $\neg p_1 \vee p_2$
  - logische Äquivalenz $p_1 \leftrightarrow p2$ p_1 genau dann, wenn p $(\neg p_1 \vee p_2) \wedge (\neg p_2 \vee p_1)$
  - Exklusives oder $p_1 \otimes p_2$ entweder p_1 oder p_2 $(p_1 \wedge \neg p_2) \vee (\neg p_1 \wedge p_2)$
- Semantik logischer Formeln
  - Eine Belegung einer Formel mit Werten wahr oder falsch heißt *Interpretation*
  - Eine Formel, die bei jeder Belegung wahr ist, heißt *Tautologie*
  - Eine Formel, die immer falsch ist, heißt *widerspruchsvoll*

p_1	p_2	$p_1 \wedge p_2$	$p_1 \vee p_2$	$p_1 \otimes p_2$	$\neg p_1$	$p_1 \rightarrow p_2$	$p_1 \leftrightarrow p_2$
f	f	f	f	f	w	w	w
f	w	f	w	w	w	w	f
w	f	f	w	w	f	f	f
w	w	w	w	f	f	w	w

Beispiel Grünfan

Auf einer Party sollen die Gäste grün kostümiert erscheinen. Die Kostümierung erlaubt (neben anderer Kleidung) aber nur das Tragen von grünen Krawatten, Socken, Hemden oder Bändern. Es gelten folgende Regeln:
1. Wenn jemand eine grüne Krawatte trägt, dann muss sie / er auch ein grünes Hemd tragen.
2. Man darf nur dann grüne Socken und grünes Hemd tragen, wenn man eine grüne Krawatte oder ein grünes Band trägt.
3. Wer ein grünes Hemd oder ein grünes Band oder wer keine grüne Socken trägt, muss eine grüne Krawatte tragen.

Ein Gast, der nicht nach diesen Regeln kostümiert ist, muss € 11 Eintrittsgeld zahlen. Herr S will an der Party teilnehmen, besitzt aber nur ein grünes Hemd. Eine grüne Krawatte könnte er für € 10, ein grünes Band für € 2 und grüne Socken für € 12 kaufen.
Wie lautet eine kostenminimale Lösung für S, um an der Party teilzunehmen?

Logische Verknüpfung	Algebraische Darstellung
$p_1 \vee p_2$ (oder)	$y_1 + y_2 \geq 1$
$p_1 \wedge p_2$ (und)	$y_1 + y_2 \geq 2$
$p_1 \otimes p_2$ (exkl. oder)	$y_1 + y_2 = 1$
$p_1 \rightarrow p_2$ (If-Then) $\neg p_1 \vee p_2$	$y_1 - y_2 \leq 0$
$\neg p_1$ (Negation)	$1 - y_1$

Beispiel Grünfan - Modell und Lösung

- Die Regeln werden zunächst aussagenlogisch formuliert wobei k, h, b, s, n die Aussagen repräsentieren S trägt grüne(s) Krawatte, Hemd, Band, Socken oder ist nicht vorschriftsmäßig kostümiert:
  - $k \rightarrow h$ oder $\neg k \vee h$
  - $(s \wedge h) \rightarrow (k \vee b)$ oder $(\neg s \vee \neg h) \vee (k \vee b)$
  - $(h \vee b \vee \neg s) \rightarrow k$ oder $(\neg h \wedge \neg b \wedge s) \vee k$
- die logischen Verknüpfungen werden in algebraische Darstellungen durch Einführung der 0-1-Variablen K, H, B, S und N überführt:
  1. $K - H \leq 0$
  2. $1 - S + 1 - H + K + B \geq 1$ oder $S + H - K - B \leq 1$
  3. $1 - H + 1 - B + S + 3K \geq 3$ oder $S + 3K - B - H \geq 1$
- Tableaudarstellung (alle Variablen haben die Werte 0 oder1)

K	B	S	H	N	Typ	RHS
10	2	12		11		Min!
1			-1	-1	≤	
-1	-1	1	1	-1	≤	1
3	-1	1	-1	3	≥	1

- Optimale Lösung: H = K = 1, B = S = N = 0, Kosten = 10, d.h. Herr S muß nur noch die Krawatte kaufen und sein grünes Hemd anziehen
- bei diesem einfachen Beispiel läßt sich die Lösung auch manuell bestimmen; große Modelle mit vielen Variablen erfordern Optimierungssoftware

Umformung von Formeln in algebraische Darstellung

- Man ist an logischen Aussagen interessiert, deren *Interpretation wahr ist*
- Im Rahmen der Optimierung werden solche Aussagen in einer äquivalenten algebraischen Darstellung abgebildet
- Dazu wird für jede elementare log. Aussage p_i eine 0-1-Variable y_i eingeführt, die den Wert 1 erhält, wenn p wahr ist und den Wert 0 sonst
- Beispiele

Wahre logische Formel	Algebraische Darstellung
p_1	$y_1 = 1$
$p_1 \vee p_2$	$y_1 + y_2 \geq 1$
$p_1 \vee p_2 \vee ... \vee p_k$	$y_1 + y_2 + ... + y_k \geq 1$
$p_1 \wedge p_2$	$y_1 + y_2 \geq 2$ besser ($y_1 = 1$ und $y_2 = 1$)
$p_1 \rightarrow p_2$	$y_2 \geq y_1$ d.h. $y_1 - y_2 \leq 0$
$p_1 \vee p_2 \rightarrow p_3$	$y_1 + y_2 \leq 2\, y_3$ besser ($y_1 \leq y_3$ und $y_2 \leq y_3$)
$\neg p_1$	$y_1 = 0$ d.h. $(1 - y_1) = 1$
$\neg p_1 \vee p_2 \vee p_3 \vee \neg p_4$	$(1 - y_1) + y_2 + y_3 + (1 - y_4) \geq 1$ d.h. $-y_1 + y_2 + y_3 - y_4 \geq -1$

Konjunktive Normalform (KNF)

- Bei komplexen Formeln kann es schwierig sein eine äquivalente algebraische Darstellung zu finden
- Mit der KNF steht eine Methodik bereit, die eine beliebige Formel in eine disaggregierte algebraische Darstellung überführt
- Definitionen
  - *Literal*: Ein Literal ist eine atomare Formel (z.B. p) oder eine negierte atomare Formel (z.B. $\neg p$). Man nennt p ein *positives* bzw. $\neg p$ ein *negatives* Literal.
  - *Klausel*: Eine Klausel besteht aus einem einzelnen Literal oder ist eine Disjunktion von zwei oder mehr Literalen.
  - *KNF*: Eine Formel ist in konjunktiver Normalform (KNF), falls sie eine Konjunktion einer oder mehrerer Klauseln ist, d.h. aus „und-verknüpften" Klauseln besteht
  - *Äquivalenz*: Zwei Formeln p_1 und p_2 heißen genau dann (semantisch) äquivalent ($p_1 \approx p_2$), wenn p_1 und p_2 denselben Wahrheitswert für jede beliebige Interpretation haben.
- Beispiel: $(\neg p_1 \vee \neg p_2) \wedge (\neg p_1 \vee p_3) \wedge p_4$ ist in KNF
- Ohne Beweis: Jede aussagenlogische Formel lässt sich in eine semantisch äquivalente Formel (d.h. mit „gleicher Bedeutung") transformieren, die in KNF ist
- Diese Transformation wird im folgenden nur an einem Beispiel dargestellt

Transformationsprozess in die KNF

- Die Transformation verläuft in drei Schritten. In jedem Schritt wird die Formel in eine semantisch äquivalente Formel umgewandelt. Die Gültigkeit der benutzten Regeln können anhand einer Wahrheitstabelle überprüft werden.

1. Logische Äquivalenzen und Implikationen entfernen
   - Es werden 2 Regeln benutzt:
     $F1 \leftrightarrow F2 \approx (F1 \rightarrow F2) \wedge (F2 \rightarrow F1)$
     $F1 \rightarrow F2 \approx \neg F1 \vee F2$
   - Beispiel: $F = a \rightarrow \neg (b \vee \neg c) \approx \neg a \vee \neg (b \vee \neg c)$
2. Negationen nach innen bewegen
   - Dies geschieht mittels der *De Morgan* Regeln; sie werden solange durchgeführt, bis alle Negationen nur vor atomaren Formeln stehen:
     $\neg (F1 \wedge F2) \approx \neg F1 \vee \neg F2$
     $\neg (F1 \vee F2) \approx \neg F1 \wedge \neg F2$
     $\neg \neg F1 \approx F1$
   - Beispiel: $F \approx \neg a \vee \neg (b \vee \neg c) \approx \neg a \vee (\neg b \wedge \neg\neg c) \approx \neg a \vee (\neg b \wedge c)$
3. Disjunktionen nach innen bzw. Konjunktionen nach außen bewegen
   - Zu diesem Zweck wird eine der Distributionsregeln eingesetzt. Sie werden solange durchgeführt bis die Formel in KNF umgewandelt ist:
     $F1 \vee (F2 \wedge F3) \approx (F1 \vee F2) \wedge (F1 \vee F3)$
   - Beispiel: $F \approx \neg a \vee (\neg b \wedge c) \approx (\neg a \vee \neg b) \wedge (\neg a \vee c)$ d.h. in KNF

Transformationsprozess einer KNF in die algebraische Darstellung

- Für jede auftretende Literal p_i definiere eine 0-1-Variable y_i
- Nun wandle *jede Klausel* der KNF getrennt in eine Ungleichung um. Dabei wird die letzte Umwandlungsregel in der obigen Tabelle (verallgemeinert) benutzt
- Die Ungleichung zu jeder Klausel hat eine rechte Seite ≥ 1
- Bei dieser Ungleichung wird auf der linken Seite jedes positive Literal p_i in der linken Seite der Klausel durch die entsprechende 0-1-Variable y_i und jedes negative Literal $\neg p$ in der Klausel durch $(1 - y_i)$ ersetzt.
- Als Beispiel betrachten wir die KNF $(\neg a \vee \neg b) \wedge (\neg a \vee c)$
  - Wir führen die 0-1-Variablen y_1 für a, y_2 für b und y_3 für c ein
  - Die Klausel $(\neg a \vee \neg b)$ wird in die Ungleichung $(1-y_1) + (1-y_2) \geq 1$ transformiert
  - Klausel $(\neg a \vee c)$ wird in die Ungleichung $(1-y_1) + y_3 \geq 1$ transformiert
  - Also kann die KNF $(\neg a \vee \neg b) \wedge (\neg a \vee c)$ in zwei Ungleichungen transformiert werden: $y_1 + y_2 \leq 1$ und $y_3 \geq y_1$

Aufgaben zu Kapitel 6

1. Überführen Sie die Regeln für die Realisierung der Projekte im Abschnitt „Logische Verknüpfungen von Aussagen“ in eine algebraische Darstellung
2. Transformieren Sie die log. Formeln des Grünfan-Beispiels in KNF und überführen Sie diese in das algebraische Modell. Welche Unterschiede ergeben sich zur ursprünglichen Formulierung?
3. Die Kundenbelieferung von einem Zentrallager eines Versandhändlers wird durch Spediteure durchgeführt. Deutschland ist in Kundenregionen aufgeteilt. Jeder Kunde ist genau einer Kundenregion zugeordnet, die wiederum von genau einem Spediteur bedient wird. Ein Spediteur kann mehrere Kundenregionen beliefern. Die Transportkosten für eine Mengeneinheit sind fest und hängen vom Spediteur und der Kundenregion ab. Die Transportmenge aller Kunden einer Kundenregion ist als (prognostizierter) Wert vorgegeben. Jeder Spediteur bietet ab einer bestimmten Transportmenge über alle Kundenregionen einen Bonus an.
   Es soll ein lineares gemischt-ganzzahliges Modell erstellt werden, das die kostengünstigste Belieferung der Kundenregionen ermöglicht. Es gilt festzulegen, welche Kundenregion von welchem Spediteur beliefert werden soll.
   Daten
   - Indexmengen: K: Kundenregionen, S: Spediteure.
   - Indexe: k: Kundenregion, s Spediteur
   - c_{ks}: Transportkosten für eine Mengeneinheit vom Spediteurs s in die Kundenregion k [GE/ME]
   - b_k: prognostizierte Transportmenge in die Kundenregion k [ME]
   - m_s : Mindestmenge [ME] ab der Spediteur s liefert
   - l_s : Transportmenge, ab der Spediteur s einen Bonus gewährt [ME]
   - t_s: Bonus des Spediteurs s [GE]

   Entscheidungsvariablen
   - y_{ks} =1, wenn Kundenregion k vom Spediteur s beliefert wird; sonst 0.
   - x_s =1, wenn ein Bonus des Spediteurs s gewährt wird; sonst 0.
   - z_s = 1, wenn Mindestmenge erreicht wird, 0 sonst