Kapitel 8

Einführung in effiziente IP-Modellformulierungen

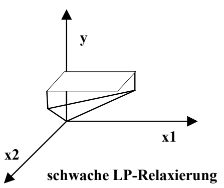
Uwe H. Suhl
Lehrstuhl für Wirtschaftsinformatik
Freie Universität Berlin

Optimierungssysteme
Version 1.1 / SS 2008

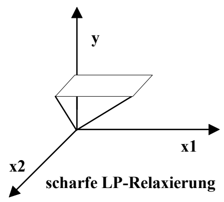
8. Effiziente IP-Modellformulierungen

Einführendes Beispiel

- Es wird eine Restriktion $x_1 + x_2 \leq 2y$ betrachtet, wobei $0 \leq x_1, x_2 \leq 1$ reelle Variablen und y eine 0-1-Variable ist
  - Ist $y = 0$, so müssen x_1 und x_2 ebenfalls 0 sein
  - Ist $y = 1$, so können x_1, x_2 beliebige Werte in ihrem zulässigen Bereich annehmen
- Wir betrachten die LP-Relaxierung, d.h. y reell mit $y \leq 1$; dann gilt
  - Ist in der LP-Lösung $y^*=0{,}5$, so führt dies zu keiner bindenden Restriktion für x_1, x_2
  - Man bezeichnet die LP-Relaxierung als schwach
- Alternativ könnte die Restriktion $x_1 + x_2 \leq 2y$ *disaggregiert* formuliert werden, d.h. $x_1 \leq y,\ x_2 \leq y$
  - Bei dieser Formulierung folgt aus $y^*=0{,}5$ $x_1, x_2 \leq 0{,}5$
  - Man bezeichnet dies als eine schärfere LP-Relaxierung
- Im Branch-and-Bound-Algorithnus spielt die „Schärfe“ der LP-Relaxierung eine wichtige Rolle, denn sowohl über den Zielfunktionswert als auch über Unzulässigkeit bzw. Integralität eines Teilproblems werden Teilbäume in der Suche eliminiert



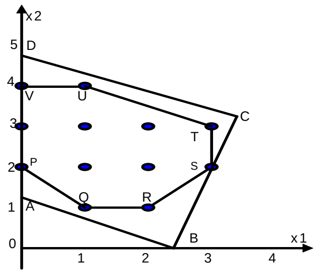
schwache LP-Relaxierung



scharfe LP-Relaxierung

Schärfe der LP-Relaxierung eines IP-Modells

- **Beim Einsatz von Branch-and-Bound bzw. Branch-and-Cut-Algorithmen wird an jedem Knoten die LP-Relaxierung gelöst**
- **Da eine optimale Lösung eines LP-Modells an einer Ecke zu finden ist, spielt die „Schärfe" der LP-Relaxierung eine wichtige Rolle**
- **Im Idealfall ist der zulässige Bereich die konvexe Hülle der ganzzahligen Gitterpunkte, d.h. das Polyeder mit den Ecken PQRSTUV**
- **leider ist die Ableitung von Cuts zur Bestimmung der konvexen Hülle von gleichem Schwierigkeitsgrad wie die Lösung des IP**
- **Eine Modellformulierung M2 heißt schärfer als eine Modellformulierung M1, wenn für die zulässigen Bereiche Z(M1) und Z(M2) gilt Z(M2) $\subset$ Z(M1), ($\subset$ strikte Inklusion)**



- **Eine Konsequenz ist unmittelbar, dass für die ZF-Werte der zugehörigen LP-Relaxierungen bei Minimierung gilt: z(LP(M1)) $\le$ z(LP(M2))**
- **Als grobe Faustformel gilt (Minimierung):**
  - **liegt der ZF-Wert einer optimalen IP-Lösung höchstens 3% über dem optimalen ZF-Wert des Ausgangs-LP, dann ist die IP-Modellformulierung akzeptabel**
  - **Mit hoher Wahrscheinlichkeit ist das IP in akzeptabler Zeit lösbar**

Beispiel eines einfachen IP-Modells

- **Gegeben ist folgendes IP-Modell**

$$\text{Max } 4x_1 - 6x_2 + 8x_3$$
$$4x_1 - 3x_2 + 2x_3 \le 4$$
$$x_1, x_2 \text{ 0-1-Variablen}, x_3 \text{ reelle Variable}, 0 \le x_3 \le 1$$

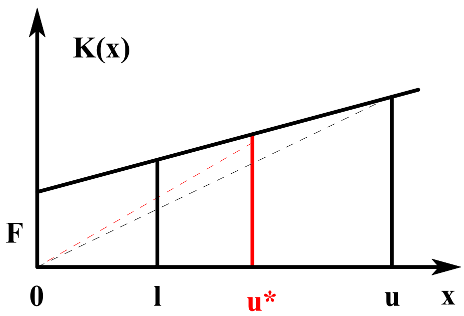
- **Die optimale Lösung der LP-Relaxierung lautet: z(LP) = 10, x_3=1, x_2=0, x_1=0,5 und ist nicht ganzzahlig**
- **Folgende Überlegungen führen zu einer schärferen LP- Relaxierung :**
  - **Aus x_2 = 1 folgt, dass die rechte Seite = 7 ist und die Restriktion damit redundant wird; also kann der Koeffizient –3 für x_2 ohne Konsequenzen auf –2 verändert werden**
  - **Aus x_1=0 folgt für die modifizierte Restriktion, dass sie redundant wird; also kann der Koeffizient für x_1 von 4 auf 2 reduziert werden, wobei die rechte Seite auf 2 modifiziert werden muss**
- **Also hat folgendes IP-Modell die gleichen 0-1-Lösungen wie das obige Modell**

$$\text{Max } 4x_1 - 6x_2 + 8x_3$$
$$2x_1 - 2x_2 + 2x_3 \le 2$$
$$x_1, x_2 \text{ 0-1-Variablen}, 0 \le x_3 \le 1$$

- **Die optimale LP- Relaxierung dieses modifizierten IP-Modells lautet: z(LP‘) = 8, x_3=1, x_2=0, x_1=0 und ist ganzzahlig; der zulässige Bereich der LP-Relaxierung ist strikt in dem des Ausgangs-Modells enthalten**

Verschärfung der LP-Relaxierung bei Fixkostenproblemen

- **in Kapitel 6 wurde das Fixkostenproblem diskutiert: die Kostenfunktion $K(x)$ ist definiert: $K(x) = 0$ für $x = 0$; ist $x > 0$, dann fallen Fixkosten $F > 0$ und variable Kosten c an, d.h. $K(x) = F + c\,x$**
- **In der betrachteten IP-Modellierung wurde eine 0-1-Variable y eingeführt; die Funktion $K(x)$ ersetzt durch $K'(x,y) = c\,x + F\,y$; weiterhin wird die Restriktion $x \le u\,y$ benötigt, wobei u eine obere Schranke für x ist**
- **Es ist extrem wichtig die obere Schranke u möglichst klein zu wählen, d.h. eine realistische obere Schranke u* für x zu bestimmen**
- **Grund: in der LP-Lösung des relaxierten Problems mit dem LP-Wert $\underline{x}$ erhält die Variable y den Wert $\underline{y} = \underline{x} / u$**
- **$K'(\underline{x}, \underline{y}) = (c + F / u)\,\underline{x}$**
- **Wenn u sehr groß ist, dann werden die Fixkosten vom LP ignoriert und y ist fraktionell oder 0, wenn $\underline{x} = 0$**



Disaggregierte Formulierungen

- **Eine häufig vorkommende Modellierungssituation betrifft Variablen x_j (reell oder ganzzahlig), mit oberen Schranken u_j, die durch eine 0-1-Variable gesteuert werden:**

schwache Formulierung; $\sum_{j\in J_i} x_j \le \left(\sum_{j\in J_i} u_j\right) y$, wobei u_j obere Schranken für x_j sind

scharfe Formulierung: $x_j \le u_j y,\ j \in J_i$

- **Spezialfall: die x_j sind 0-1-Variablen und der Koeffizient für y ist die negative Kardinalität der Menge J_i; $x_i \le y$ ist dann die scharfe Formulierung**
- **$\Sigma\, y_i \ge |J_i|\, y \Rightarrow y_i \ge y,\ i \in J_i$ ist eine schärfere Formulierung**
- **Aufsummierung von Variablen**
  - **Manchmal werden Modelle mit aufsummierten Variablen formuliert, die im Prinzip redundant sind, jedoch für Auswertungen in das Modell aufgenommen werden:**

schwache Formulierung : $x = \sum_{j\in J_i} x_j,\ x \le u\,y$, y 0 – 1 – Variable und u obere Schranke

scharfe Formulierung : $x_j \le u_j y$, wobei u_j eine (kleinere) obere Schranke für x_j ist

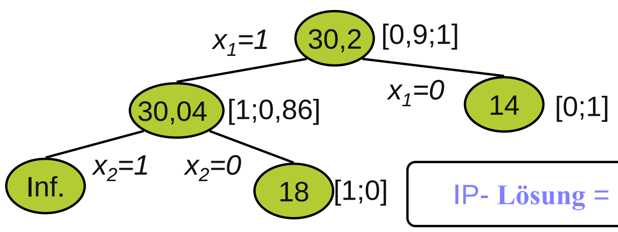
Verschärfung der LP-Relaxierung durch Schnittebenen

- **Gegeben ist folgendes IP-Modell:**

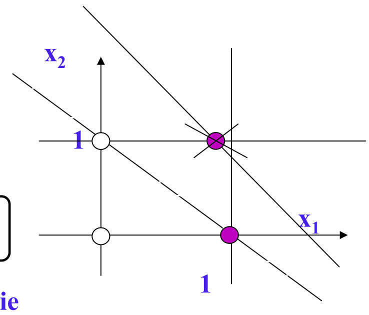
$$Max\ 18x_1 + 14x_2$$
$$10x_1 + 7x_2 \leq 16 \qquad x_1, x_2 \in \{0,1\}$$

LP- Lösung = 30,2
x_1=0.9, x_2=1

- **Lösung durch Branch& Bound:**



IP- Lösung = 18



- ***Gültige Schnittebene (valid inequality)*** **ist eine Restriktion die**
  - ***explizit*** **nicht im Modell vorhanden ist**
  - **Keine zulässige Integer-Lösung des IP-Modells abschneidet**
  - **Die Lösung der LP-Relaxierung abschneidet**
- **Eine gültige Schnittebene für das Beispiel ist:**

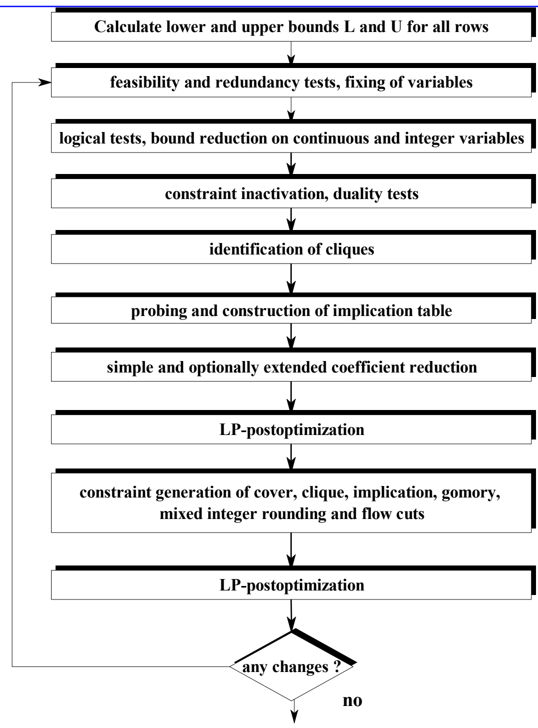
$$x_1 + x_2 \leq 1$$

LP- Lösung = IP- Lösung = 18
x_1=1, x_2=0

- **Mit ihr ist *in diesem Fall* die Lösung der LP-Relaxierung ganzzahlig**

IP-Preprocessing in MOPS

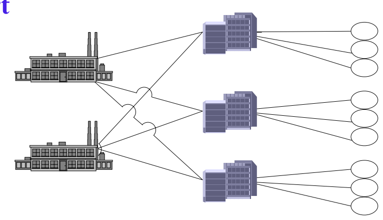
- **Anwendung von Techniken um die LP-Relaxierung zu verschärfen**
  - **logische Tests für 0-1-Variablen**
  - **Bound Reduktion**
  - **Redundanztests für Restriktionen**
  - **Koeffizientenreduktion**
  - **Bestimmun von Cliques und Implikationen**
  - **Ableitung von Cliques und Implikationen Cuts**
  - **Ableitung von Cover, Flow, MIR und Gomory Cuts**
- **Damit können einige der vorgestellten Probleme automatisch behoben werden**
- **Trotz dieser Techniken spielt die Modell-formulierung noch eine wichtige Rolle**



Disaggregation an einem praktischen Beispiel

- **Es wird eine Variante des Problems von Kapitel 7 betrachtet:**
  - **dieses praktische Problem trat bei einem Planungsproblem bei Frito Lay (http://www.fritolay.com) auf und ist in Man. Science 24 (1978), 1622 genauer beschrieben wird**
  - **Gegeben sind Produktionsstätten, Zentralläger und Bedarfsregionen**
  - **Ferner Produktionskapazitäten, Produktions-, Transportkosten der Artikel im Netzwerk, weiterhin der Bedarf jeder Bedarfsregion im Planungshorizont pro Artikel**
  - **gefragt sind:**
    die Transportmengen x(w,z,i) von Fabrik w zu Zentrallager z von einem Artikel i
    Die Transportmengen t(z,u,i) des Artikels i von z nach u, $z \in Z$, $i \in I$
    die Zuordnung der Bedarfsregionen y(z,u) zu *genau einem* Zentrallager, d.h. y(z,u) = 1, wenn Bedarfsregion u von ZL z beliefert wird, 0 sonst
  - **Die Indizes und Daten sind in Kapitel 7 definiert**

x(w,z,i) **t(z,u,i)**



Fabrik **Zentrallager** **Bedarfsregionen**

Disaggregation an einem praktischen Beispiel (2)

- **Es werden nur die wichtigsten Restriktionen der ursprünglichen aggregierten Modellformulierung (MA) und der disaggregierten Modellformulierung (MD) betrachtet**
- **Die aggregierte Modellformulierung basiert auf folgenden Restriktionen**

aggregierte Modellformulierung (MA)

$$\sum_{i\in I} t(z,u,i) = \Big(\sum_{i\in I} b(u,i)\Big)\, y(z,u),\; z \in Z, u \in U$$

- **Die disaggregierte Formulierung hat Tausende von Restriktionen mehr:**

disaggregierte Modellformulierung (MD)

$$t(z,u,i) = b(u,i)\, y(z,u),\; z \in Z, u \in U, i \in I$$

Gemeinsame Teile für (MA) und (MD)

$$\sum_{z\in Z} x(w,z,i) \le k(w,i),\; w \in W, i \in I_w$$

$$\sum_{w\in W_i} x(w,z,i) - \sum_{u\in U} t(z,u,i) = 0,\; z \in Z, i \in I$$

$$\sum_{z\in Z} t(z,u,i) = b(u,i),\; u \in U, i \in I$$

$$\sum_{z\in Z} \mathrm{y(z,u)} = 1,\; u \in U$$

$$\mathrm{x(w,z,i)} \ge 0,\; w \in W, z \in Z, i \in I_w$$

$$\mathrm{t(z,u,i)} \ge 0,\; z \in Z, u \in U, i \in I$$

$$\mathrm{y(z,u)} \in \{0,1\},\; u \in U, z \in Z$$

- **führte jedoch zu einer schnellen Lösung (1,5 Min.) während die aggregierte Modellformulierung auch nach 20 Stunden keine Lösung ergab**
- **Interessant war, dass keine der konsultierten Universitäten den Fehler in der Modellformulierung bemerkte und andere Software empfahl**

Vereinfachtes IP-Modell zur Losgrößenplanung

- Es wird ein Losgrößenplanungsproblem mit *einem* Produkt betrachtet
  - Indizes und Indexmengen: t Periode, $t \in T$
  - Konstanten

    b_t Bedarf des Produktes in Periode t [ME]

    f_j fixe Rüstkosten für Produktion [GE]

    h_t Lagerhaltungskosten [GE/ME]

    p_t variable Produktionskosten [GE/ME]
  - Kontinuierliche Variablen

    l_t Lagerbestand des Produktes am Ende der Periode t

    x_t Produktionsmenge des Produktes in Periode t

    (0-1)-Variablen: $y_t =$ 1 falls in Periode t produziert wird, 0 sonst
- Modell

$$\text{Min} \sum_{t \in T} (f_t y_t + h_t l_t + p_t x_t)$$

$$x_t \leq y_t \sum_{t=1}^{|T|} b_t, t \in T,$$

$$l_{t-1} + x_t - l_t = b_t, t \in T$$

$$l_0 = l_{|T|} = 0, l_t \geq 0, x_t \geq 0, y_t \in \{0,1\}, t \in T$$

Verbessertes IP-Modell zur Losgrößenplanung

- Kritisch ist der zu hohe Wert für die Summe des Bedarfs $\sum_{t=1}^{|T|} b_t$ zur Einhaltung der Fixkosten-Funktion
- In einer verbesserten Formulierung werden Variablen z_{it} definiert, $i \in T, t \geq i$
- z_{it} ist diejenige Produktionsmenge in Periode i, die den Bedarf in Periode $t \geq i$ decken soll
- Jetzt gilt also $x_i = \sum_{t=i}^{T} z_{it}$
- Mit den neu definierten Variablen kann die Losgrößenbedingung viel schärfer formuliert werden: $z_{it} \leq b_t\, y_i$, $i,t \in T$
- Alle übrigen Restriktionen bleiben bestehen
- Die Variablen x_i können durch die Variablen z_{it} im restlichen Modell substituiert werden
- Obwohl diese Modellformulierung sehr viel mehr Variablen und Restriktionen aufweist, ist das Modell als IP leichter zu lösen
- Nur die Lösung der LP-Relaxierungen dauert länger; dies wird überkompensiert durch sehr viel weniger Knoten im Branch-and-Bound

MIP-Modell für kurzfristige Produktionsplanung

- Im Kapitel 7 wurde folgendes Modell zur Produktionsplanung betrachtet:
  - Kontinuierliche Variablen

    x_{jt} Produktionszeit für Produkt j in Periode t [ZE]

    l_{jt} Bestand des Produktes j am Ende von Periode t [ME]
  - (0-1)-Variablen

    r_{jt} = 1, falls auf Produkt j in Periode t umgerüstet wird, 0 sonst

    y_{jt} = 1, falls in Periode t Produkt j produziert wird, 0 sonst
  - IP-Modell

$$
\begin{aligned}
&\text{Min} \sum_{t\in T}\sum_{j\in J}(c^R_{jt} r_{jt} + c^F_{jt} y_{jt} + c^V_{jt} x_{jt} + c^L_{jt} l_{jt})\\
&x_{jt} + z_j\, r_{jt} \le k_t\, y_{jt},\ \forall(j\in J, t\in T)\\
&y_{jt} - y_{j(t-1)} \le r_{jt},\ \forall(j\in J, t\in T)\\
&l_{jt} = l_{j0} + \sum_{k=1}^{t} (p_{jk}\, x_{jk} - b_{jk}),\ \forall(j\in J, t\in T)\\
&\sum_{j\in J} a_j l_{jt} \le l,\ \sum_{j\in J} y_{jt} \le 1,\quad \forall t\in T\\
&x_{jt}, l_{jt} \in R_+,\ r_{jt}, y_{jt} \in \{0,1\}, \forall(j\in J, t\in T)
\end{aligned}
$$

- Wir betrachten im folgenden eine Verschärfung der LP-Relaxierung durch Hinzufügen von Ungleichungen (Schnittebenen)

Verbessertes Modell

- M. Constantino, A Cutting Plane Approach to Capacitated Lot-Sizing with Start-up Costs, Mathematical Programming 75, 353-376 (1996)
- Dazu werden logische Bedingungen für das Umrüsten ausgenutzt
  - wenn Produkt j in Periode t nicht produziert wird, so muss $z_{jt} = 0$ sein, d.h. $z_{jt} \le y_{jt}$
  - Wenn in der Vorperiode Produkt j produziert wurde, so muss $z_{jt} = 0$ sein: $z_{jt} \le 1 - y_{j(t-1)}$
  - Die vorhergehende Ungleichung kann noch verschärft werden: entweder es wird in Periode t auf Produkt j umgerüstet (dann kann in dieser Periode kein anderes Produkt gefertigt werden) oder es wurde in der Vorperiode Produkt j produziert aber nicht in Periode t oder es wird auf ein anderes Produkt i (i≠j) umgerüstet oder nichts von alledem: $y_{j(t-1)} + r_{jt} + \sum_{i,i\ne j}(y_{it} - r_{it}) \le 1,\ \forall\, j\in J, t\in T$
- Diese Ungleichungen können dem Original-Modell hinzugefügt werden und führen zu einer signifikanten Reduktion der entwickelten Knoten im B&C
- Es genügt nur die y-Variablen als 0-1 zu definieren, wenn alle Rüstkosten positiv sind
- Allerdings zeigen numerische Resultate, dass die ursprüngliche Modell-formulierung wo die Rüstvariablen als kontinuierlich definiert wurden, fast gleich gute Resultate erzeugt!