FREIE UNIVERSITÄT BERLIN
Fachbereich Wirtschaftswissenschaft
Institut für Statistik und Ökonometrie (WE 2)
Prof. Dr. J. Wolters **WS 07/08**

Mathematik

3. Aufgabenblatt

Abgabe bis spätestens Freitag 11.01.2008 zwischen 14:30 und 16:00 Uhr
(im Raum 330, Boltzmannstr. 20)

Bitte **immer vollständig** ausfüllen:

Name, Vorname: ....

Matrikel-Nr.: ....

Semesterzahl: .... Tutorin / Tutoriumstermin: ....

Bitte entsprechend ankreuzen:

[ ] Bachelor BWL [ ] Diplom BWL [ ] Magister

[ ] Bachelor VWL [ ] Diplom VWL [ ] Bachelor 30 LP....................
(bitte näher erläutern)

Alle Rechenwege sind anzugeben, sonst wird keine volle Punktzahl vergeben.

Bitte **tackern** Sie die einzelnen Seiten zusammen und tragen Sie auf jedem Blatt Name und Matrikel-Nr. ein. Bitte nicht mit Bleistift schreiben. Bitte keine zusätzlichen Blätter verwenden, gegebenenfalls Rückseiten benutzen.

Dieses Schema dient nur der Korrektur

Aufgabe	**1**	**2**	**3**	**4**	$\sum$	**%**
Erreichte Punktzahl	*5*	*15*	*9*	*14*	*43*	

Die Prozentangaben wurden auf ganze Zahlen **auf**gerundet.

Name, Vorname: .... Matrikel-Nr.: ....

Aufgabe 1 (5 Punkte)

Gegeben seien die Matrizen $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 5 \\ -4 & 7 & -5 \\ 2 & -1 & a \end{pmatrix}$ und $C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 5 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ und der Spaltenvektor $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$.

(a) Welche Bedingung muss erfüllt sein, damit das lineare Gleichungssystem $A\underline{x} = C\underline{x}$ eine nichttriviale Lösung besitzt und welchen Wert nimmt a dann an?

(b) Bestimmen Sie die Lösungen des in (a) gegebenen Gleichungssystems.

Name, Vorname: .... Matrikel-Nr.: ....

Aufgabe 2 (15 Punkte)

Gegeben ist die Funktion $f(x) = \dfrac{x}{x+1}$ (1)

(a) Geben Sie den größtmöglichen Definitionsbereich für (1) an.

(b) Untersuchen Sie die Funktion (1) auf Symmetrie.

(c) Bestimmen Sie die Nullstellen von (1).

(d) Bestimmen Sie die Polstellen von (1).

(e) Bestimmen Sie das asymptotische Verhalten von (1).

Name, Vorname: .... Matrikel-Nr.: ....

(f) Zeichnen Sie die Funktion im Intervall $-4 \leq x \leq 3$.

(g) Charakterisieren Sie das Monotonieverhalten von (1).

(h) Charakterisieren Sie das Krümmungsverhalten von (1).

Name, Vorname: .... Matrikel-Nr.: ....

(i) Wieso existiert die Umkehrfunktion $f^{-1}(x)$ von (1) ?

(j) Berechnen Sie $f^{-1}(x)$.

(h) Skizzieren Sie $f^{-1}(x)$.

Name, Vorname: .... Matrikel-Nr.: ....

Aufgabe 3 (9 Punkte)

(a) Berechnen Sie $\lim\limits_{t \to \infty} \dfrac{(t+7)^2}{3t^2+5}$.

(b) Berechnen Sie $\lim\limits_{s \to \infty} \dfrac{3+5s+7s^3}{(s^2+1)(s-1)}$

(c) Zeigen Sie, dass $a(x) = 2x - 1$ asymptotische Funktion für $h(x) = \dfrac{2x^2+x+1}{x+1}$ ist.

Name, Vorname: .... Matrikel-Nr.: ....

(d) Berechnen Sie die erste Ableitung von $g(x) = (e^{2x} + 4e^{-x})^2$

(e) Berechnen Sie die erste Ableitung von $h(x) = 4(e^{4x} + 2e^{x} - 8e^{-2x})$.

(f) Welcher Zusammenhang besteht zwischen $g(x)$ und $h(x)$?

Name, Vorname: .... Matrikel-Nr.: ....

Aufgabe 4 Multiple Choice (14 Punkte)

Für jede der folgenden Aufgaben gibt es maximal 2 Punkte. Von den vier Alternativen jeder Aufgabe sind **genau zwei** richtig und diese sind anzukreuzen. Sind **beide** Kreuze richtig, so gibt es **zwei** Punkte. Ist nur **eine** Alternative angekreuzt und richtig, so gibt es **einen** Punkt. In **allen anderen Fällen** gibt es **null** Punkte!

(a) Gegeben seien $A = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ -1 & -3 & 0 \\ 11 & 12 & 2 \end{pmatrix}$ und $\underline{b} = \begin{pmatrix} 12 \\ -6 \\ -9 \end{pmatrix}$.

[ ] Das Gleichungssystem $A\underline{x}=\underline{0}$ hat nur die triviale Lösung.

[ ] Die Lösung für x_2 im Gleichungssystem $A\underline{x}=\underline{b}$ lautet $x_2 = 1$.

[ ] Die Lösung für x_3 im Gleichungssystem $A\underline{x}=\underline{b}$ lautet $x_3 = 15$.

[ ] Das Gleichungssystem $A\underline{x}=\underline{b}$ ist nicht über die Inverse von A lösbar, weil $|A| > 1$ ist.

(b) Gegeben seien die Vektoren $\underline{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\underline{b} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\underline{c} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ k \end{pmatrix}$, $\underline{d} = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ mit $k \in \mathrm{IR}$.

[ ] Die Vektoren $\underline{a}, \underline{c}, \underline{d}$ bilden eine Basis im IR^3 für $k = 0$.

[ ] Die Vektoren $\underline{a}, \underline{b}, \underline{c}, \underline{d}$ bilden eine Basis im IR^4.

[ ] Für $k = 1$ ist jeder Vektor im IR^3 als Linearkombination der Vektoren $\underline{a}, \underline{c}, \underline{d}$ darstellbar.

[ ] Die Koordinaten des Vektors $\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$ bezüglich der Vektoren $\underline{a}, \underline{b}, \underline{d}$ sind gegeben durch

$\alpha_1 = \frac{5}{4}, \alpha_2 = \frac{1}{4}$ und $\alpha_3 = 0$.

Name, Vorname: .... Matrikel-Nr.: ....

(c) Gegeben sei eine Einheitsmatrix der Dimension (n x n) und ein Skalar $k \in$ IR$\setminus\{0\}$.

[ ] $\left|(I')^{-1}\right| = 1$

[ ] $|kI'| = k$

[ ] $rg(kI) = k^n rg(I)$

[ ] $\left|I^n\right| = 1$

(d) Sei f eine auf IR definierte streng monoton wachsende Funktion. Dann gilt:

[ ] Ist g (x) = –2 f (x), so verläuft g streng monoton fallend auf IR .

[ ] Ist g (x) = 2 – f (x), so verläuft g streng monoton wachsend auf IR .

[ ] Wenn f : IR → (0,1) und g (x) = f^{-1} (x), so ist g streng monoton fallend auf IR .

[ ] Wenn f : IR → $(-\infty, -1)$ und g(x) = | f (x)| , so ist g streng monoton fallend auf IR .

(e) Sei $f(x) = \ln(x+1)$ für x > −1. Dann gilt:

[ ] *f* ist eine konkave, streng monoton steigende Funktion, die durch den Ursprung geht.

[ ] $g(x) = e^{x+1}$ ist die Umkehrfunktion von *f(x)*.

[ ] $e^{f(x)} - 1 = x$

[ ] $f(x)$ hat für $x = 1$ eine Nullstelle.

Name, Vorname: .... Matrikel-Nr.: ....

(f) Im Folgenden bezeichne *s* die unabhängige Veränderliche und *t* einen Parameter.

Gegeben sei eine Funktion $f\colon IR \to IR$ mit $f(s) = (s + t)^2$, $t \in IR$.

[ ] $f(2) = 4 + t^2$

[ ] $f(t) = 4t^2$

[ ] $f'(t) = 4t$

[ ] $f'(s) = 2s$

(g) Gegeben ist die Funktion $f(x) = mx + b$

[ ] Für m = 0 ist *f(x)* geradsymmetrisch.

[ ] *f(x)* ist streng monoton wachsend für $m < 0$ und $b > 0$.

[ ] *f(x)* ist ungeradsymmetrisch.

[ ] Für $b = 0$ ist *f(x)* eine Ursprungsgerade.