FREIE UNIVERSITÄT BERLIN
Fachbereich Wirtschaftswissenschaft
Institut für Statistik und Ökonometrie (WE 2)
Prof. Dr. J. Wolters **WS 07/08**

Mathematik

5. Aufgabenblatt

Abgabe bis spätestens Montag 04.02.2008 bis 11:00 Uhr
(im Raum 330, Boltzmannstr. 20)

Bitte **immer vollständig** ausfüllen:

Name, Vorname: ....

Matrikel-Nr.: ....

Semesterzahl: .... TutorIn / Tutoriumstermin: ....

Bitte entsprechend ankreuzen:

[ ] Bachelor BWL [ ] Diplom BWL [ ] Magister

[ ] Bachelor VWL [ ] Diplom VWL [ ] Bachelor 30 LP...................
(bitte näher erläutern)

Alle Rechenwege sind anzugeben, sonst wird keine volle Punktzahl vergeben.

Bitte **tackern** Sie die einzelnen Seiten zusammen und tragen Sie auf jedem Blatt Name und Matrikel-Nr. ein. Bitte nicht mit Bleistift schreiben. Bitte keine zusätzlichen Blätter verwenden, gegebenenfalls Rückseiten benutzen.

Dieses Schema dient nur der Korrektur

Aufgabe	**1**	**2**	**3**	$\sum$	**%**
Erreichte Punktzahl	*5*	*9*	*16*	*30*	

Die Prozentangaben wurden auf ganze Zahlen **auf**gerundet.

Name, Vorname: .... Matrikel-Nr.: ....

Aufgabe 1 (5 Punkte)

Gegeben ist die Funktion g: $\mathrm{IR}^3 \rightarrow \mathrm{IR}$ mit $g(x,y,z) = 2x - x^2 + 10y - y^2 + 3 - z^2$.

(a) Berechnen Sie die x-, y- und z-Koordinaten des stationären Punktes von g.

(b) Stellen Sie die Hessematrix von g auf.

(c) Überprüfen Sie, ob g ein Maximum oder ein Minimum aufweist.

Name, Vorname: .... Matrikel-Nr.: ....

Aufgabe 2 (9 Punkte)

Die Funktion $f(x, y) = cx^2 + y^2 + 4(2x + y)$ mit c $\in$ IR soll unter der Nebenbedingung $x + 2y = 4$ optimiert werden. Bearbeiten Sie hierzu die folgenden Aufgaben:

(a) Wie lautet die Lagrangefunktion des Optimierungsproblems?

(b) Wie lauten die notwendigen Bedingungen des Optimierungsproblems?

(c) Zeigen Sie, dass der Lagrangemultiplikator an den stationären Stellen gegeben ist durch:

$$\lambda = -8\frac{1+2c}{1+4c} \text{ bzw. } \lambda = 8\frac{1+2c}{1+4c}, \qquad c \neq -\frac{1}{4}$$

Name, Vorname: .... Matrikel-Nr.: ....

(d) Geben Sie die (x, y, λ) -Koordinaten der stationären Stellen für $c = -\frac{3}{8}$ an.

(e) Wie lautet die Hessematrix für das Optimierungsproblem?

(f) Zeigen Sie, dass für die Determinante der Hessematrix gilt: $|H| = -2(1+4c)$.

(g) Untersuchen Sie, für welche Werte von c Maxima bzw. Minima vorliegen.

Name, Vorname: .... Matrikel-Nr.: ....

Aufgabe 3 Multiple Choice (16 Punkte)

Für jede der folgenden Aufgaben gibt es maximal 2 Punkte. Von den vier Alternativen jeder Aufgabe sind **genau zwei** richtig und diese sind anzukreuzen. Sind **beide** Kreuze richtig, so gibt es **zwei** Punkte. Ist nur **eine** Alternative angekreuzt und richtig, so gibt es **einen** Punkt. In **allen anderen Fällen** gibt es **null** Punkte!

(a) Gegeben sei die Funktion $f(x) = \dfrac{(x^2 - 2x + 1)(x+1)}{x^2(x-1)}$.

[ ] *f(x)* hat an der Stelle $x_0 = \sqrt[3]{2}$ eine waagerechte Tangente.

[ ] Der maximale Definitionsbereich von *f(x)* ist D = $\mathbb{R} \backslash \{0,1\}$.

[ ] $f'(x) = \dfrac{2}{x^3}$

[ ] $\lim\limits_{x \to 1} f(x) = \infty$

(b) Für die Funktion $g(x) = \begin{cases} 1 - x^2 & \textit{für } x \le 0 \\ e^x & \textit{für } x > 0 \end{cases}$ gilt:

[ ] g(x) ist konvex für x > 0.

[ ] g(x) hat für $x_1 = -\dfrac{1}{2}$ ein relatives Minimum.

[ ] g(x) ist differenzierbar an der Stelle $x_0 = 0$.

[ ] g(x) ist stetig an der Stelle $x_0 = 0$.

(c) Gegeben sei die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mit $f(x,y) = \ln(ax^2y^2)$. Dann gilt:

[ ] $\dfrac{f_x(1,y)}{f_y(1,y)} = y$

[ ] $f(x,y)$ ist homogen vom Grade 4.

[ ] $\dfrac{2}{x}dx + \dfrac{2}{y}dy$ ist das totale Differential von $f(x,y)$.

[ ] Die Steigung der Höhenlinien ist $\dfrac{dy}{dx} = 2ax^2 e^{ax^2y^2}$.

(d) Gegeben ist die Funktion $f(x,y,z) = (x-1)^2 + e^{y^2} + (z+1)^2$.

[ ] Die Determinante der Hessematrix hat für $y_0 = 0$ den Wert 8.

[ ] Die Funktion hat für $x_1 = 1$, $y_1 = 0$ und $z_1 = -1$ ein Maximum.

[ ] Die Funktion hat für $x_0 = -1$, $y_0 = 0$ und $z_0 = 1$ einen stationären Punkt.

[ ] $f_{yy}(x,y,z) = 2e^{y^2}(1 + 2y^2)$

Name, Vorname: .... Matrikel-Nr.: ....

(e) Gegeben ist die Funktion $g(x,y)=(x+y)^2+x(x^2-12)$. Dann gilt:

[ ] $g(x,y)$ hat für $x_0=-2$ und $y_0=2$ ein relatives Minimum.
[ ] $g_{xx}(x,y)=g_{yx}(x,y)$.

[ ] Für die Determinante der Hessematrix gilt $\Delta_2(x,y)=12x$.

[ ] $g_{yy}(x,y)=g_{xy}(x,y)$.

(f) Gegeben ist die Funktion $f(x,y)=3xy-y^2-2x^2$. Dann gilt:

[ ] $f(x,y)$ ist linear homogen.
[ ] $f(x,y)$ ist homogen von Grad 2.
[ ] $f_{xy}(x,y)=3$
[ ] $f_y(x,y)=f_x(x,y)$

(g) Gegeben ist die Funktion $f(x_1,x_2)=e^{x_2^2}e^{2x_1}$

[ ] $f(0,0)=0$

[ ] Die Steigung der Höhenlinien beträgt $\dfrac{dx_1}{dx_2}=-x_2$.

[ ] Die Funktion $g(x)=e^{x^2}e^{2x}$ hat eine stationäre Stelle bei $x=-1$.

[ ] $-f(x_1,x_2)\geq 0$ für $x_1,x_2\in IR$.

(h) Sei $h(x,y)=\cos(x^2)\cdot\sin(y^2)$. Dann gilt:

[ ] $h_x(x,y)=2x\cdot\sin(x^2)\cdot\sin(y^2)$

[ ] $h_y(x,y)=2y\cdot\cos(x^2)\cdot\cos(y^2)$

[ ] $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{x}{y}\cdot\tan(x^2)\cdot\tan(y^2)$

[ ] $\dfrac{dx}{dy}=-\dfrac{x}{y}\cdot\tan(x^2)\cdot\tan(y^2)$