FREIE UNIVERSITÄT BERLIN
Fachbereich Wirtschaftswissenschaft
Institut für Statistik und Ökonometrie (WE 2)
Prof. Dr. J. Wolters **WS 07/08**

Mathematik

2. Aufgabenblatt

Abgabe bis spätestens Freitag 14.12.2007 zwischen 14:30 und 16:00 Uhr
(im Raum 330, Boltzmannstr. 20)

Bitte **immer vollständig** ausfüllen:

Name, Vorname: ....

Matrikel-Nr.: ....

Semesterzahl: .... Tutorin / Tutoriumstermin: ....

Bitte entsprechend ankreuzen:

[ ] Bachelor BWL [ ] Diplom BWL [ ] Magister

[ ] Bachelor VWL [ ] Diplom VWL [ ] Bachelor 30 LP....................
(bitte näher erläutern

Alle Rechenwege sind anzugeben, sonst wird keine volle Punktzahl vergeben.

Bitte **tackern** Sie die einzelnen Seiten zusammen und tragen Sie auf jedem Blatt Name und Matrikel-Nr. ein. Bitte nicht mit Bleistift schreiben. Bitte keine zusätzlichen Blätter verwenden, gegebenenfalls Rückseiten benutzen.

Dieses Schema dient nur der Korrektur

Aufgabe	**1**	**2**	**3**	$\sum$	**%**
Erreichte Punktzahl	*11*	*8*	*12*	*31*	

Die Prozentangaben wurden auf ganze Zahlen **auf**gerundet.

Name, Vorname: .... Matrikel-Nr.: ....

Aufgabe 1 (11 Punkte)

Gegeben seien die folgenden Matrizen:

$$A_b = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & -2 \\ 1 & -1 & b \end{pmatrix} \text{ und } B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

(a) Für welche Werte von b ist A regulär?

(b) Für welchen Wert von b ist B die Inverse von A?

(c) Bestimmen Sie die Lösung des Gleichungssystems $B\underline{x}=\underline{a}_1$ mit $\underline{a}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$.

Name, Vorname: .... Matrikel-Nr.: ....

(d) Gegeben sei das Gleichungssystem $A_2\,\underline{x} = \underline{a}_2$ mit $\underline{a}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1-k \\ 3k \end{pmatrix}$.

(i) Wie muss k gewählt werden, damit das gegebene Gleichungssystem keine Lösung hat? (Begründung!)

(ii) Ist das oben gegebene Gleichungssystems für $k = -\frac{1}{2}$ lösbar? (Begründung!)

Bestimmen Sie gegebenenfalls die Lösung.

Name, Vorname: .... Matrikel-Nr.: ....

Aufgabe 2 (8 Punkte)

Gegeben ist das folgende lineare Gleichungssystem (LGS):

$$\begin{array}{rcrcrcrcl} x_1 & - & x_2 & + & 2x_3 & + & 4x_4 & = & 2 \\ & - & x_2 & + & 3x_3 & - & kx_4 & = & 0 \\ & & 2x_2 & - & 6x_3 & + & x_4 & = & a \end{array} \qquad \text{mit } a \in \mathbb{R} \text{ und } k \in \mathbb{R}.$$

(a) Formen Sie dieses LGS äquivalent auf Dreiecksgestalt um.

(b) Für welchen Wert von a ist das LGS lösbar, wenn $k = \frac{1}{2}$ ist? (Begründung!)

(c) Für den in (b) gefundenen Wert von a und $k = \frac{1}{2}$ gilt:

Das LGS

[ ] ist nicht lösbar,

[ ] ist eindeutig lösbar,

[ ] hat eine einparametrige Lösungsmenge,

[ ] hat eine zweiparametrige Lösungsmenge,

[ ] hat eine dreiparametrige Lösungsmenge.

(d) Berechnen Sie alle Lösungen des LGS für $a = 0$ und $k = -2$.

Tragen Sie die Lösungen bitte hier ein:

$x_1{}^* =$

$x_2{}^* =$

$x_3{}^* =$

$x_4{}^* =$

Name, Vorname: .... Matrikel-Nr.: ....

Betrachten Sie jetzt das lineare Gleichungssystem (LGS):

$$\begin{array}{rcrcrcl} x_1 & - & x_2 & + & 2x_3 & = & 2 \\ & - & x_2 & + & 4x_3 & = & 0 \\ & & 2x_2 & - & 6x_3 & = & a \end{array} \qquad \text{mit } a \in \mathbb{R}.$$

(e) Für welche Werte von *a* können Sie das LGS mit der Cramerschen Regel lösen? *(Begründung!)*

(f) Berechnen Sie für $a = 2$ die Lösung für x_3.

Name, Vorname: .... Matrikel-Nr.: ....

Aufgabe 3 Multiple Choice (12 Punkte)

Für jede der folgenden Aufgaben gibt es maximal 2 Punkte. Von den vier Alternativen jeder Aufgabe sind **genau zwei** richtig und diese sind anzukreuzen. Sind **beide** Kreuze richtig, so gibt es **zwei** Punkte. Ist nur **eine** Alternative angekreuzt und richtig, so gibt es **einen** Punkt. In **allen anderen Fällen** gibt es **null** Punkte!

(a) Gegeben sind die Matrizen $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ und $B = \begin{pmatrix} 0 & 4 \\ 4 & 4 \end{pmatrix}$, sowie die Vektoren $\underline{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ und $\underline{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} \neq \underline{0}$. Dann gilt:

[ ] Das lineare Gleichungssystem $AB\underline{x} = \underline{b}$ besitzt nur die triviale Lösung, da B vollen Rang hat

[ ] Das lineare Gleichungssystem $AB\underline{x} = \underline{b}$ besitzt eine eindeutige Lösung.

[ ] $\underline{x}^* = A^{-1}B^{-1}A\underline{b}$ löst das lineare Gleichungssystem $AB\underline{x} = \underline{b}$.

[ ] Da A^{-1} existiert, ist das lineare Gleichungssystem $AB\underline{x} = \underline{b}$ nicht lösbar.

(b) Kreuzen Sie die richtigen Aussagen an.

[ ] Ein inhomogenes LGS besitzt bei regulärer Koeffizientenmatrix nur die triviale Lösung.

[ ] Ein quadratisches inhomogenes LGS ist eindeutig lösbar, wenn die Determinante der Koeffizientenmatrix ungleich Null ist.

[ ] Gilt $\underline{b} = \underline{0}$ in $A\underline{x} = \underline{b}$, so ist A regulär.

[ ] Ist A singulär in $A\underline{x} = \underline{b}$ und $\underline{b} \neq \underline{0}$, dann ist das LGS nur dann lösbar, wenn $rg(A|\, b) = rg(A)$ ist.

(c) Es sei A eine symmetrische und reguläre $(n \times n)$ Matrix, B eine $(n \times n)$ Matrix und I die $(n \times n)$ Einheitsmatrix. Dann gilt:

[ ] $(AB)' \cdot (A^{-1}I^{-1}A)' = B'A$.

[ ] Die Zeilen der Matrix $B \cdot I$ bilden eine Basis im IR^n.

[ ] Die Matrix $I \cdot A \cdot I^{-1}$ hat eine von Null verschiedene Determinante.

[ ] $(B')' = B'$.

Name, Vorname: .... Matrikel-Nr.: ....

(d) Gegeben ist die Matrix $D = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 & 5 \\ 0 & 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

[ ] D ist invertierbar.

[ ] Die Spalten von D bilden eine Basis des IR^4.

[ ] D hat vollen Zeilenrang.

[ ] Im Gleichungssystem $D\underline{x}=0$ existiert eine Lösung mit genau einem freien Parameter.

(e) Gegeben seien die Matrizen $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$ und $B = \begin{pmatrix} 8 & 2 & -2 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ sowie die entsprechend dimensionierten Spaltenvektoren $\underline{x}$ und $\underline{b}$. Es gilt:

[ ] $\mathrm{rg}(A) = \mathrm{rg}(B)$

[ ] $|A| = |B|$

[ ] Das lineare Gleichungssystem $A\underline{x} = \underline{0}$ besitzt nicht-triviale Lösungen.

[ ] Das lineare Gleichungssystem $B\underline{x} = \underline{b}$ ist lösbar mit einem freien Parameter.

(f) Seien A und B (nxn)-Matrizen, $\underline{x}$ und $\underline{b}$ (nx1)-Vektoren. Dann gilt:

[ ] Sei (A − B) eine singuläre Matrix, dann ist $A\underline{x} = B\underline{x}$ nicht lösbar.

[ ] Für A = B ist das lineare Gleichungssystem $A\underline{x} = B\underline{x} - \underline{b}$ eindeutig lösbar, wenn $\underline{b}$ nicht der Nullvektor ist.

[ ] $A\underline{x} = B\underline{x} - \underline{b}$ ist immer lösbar, falls $\underline{b}$ der Nullvektor ist.

[ ] Wenn die Matrix A Dreiecksgestalt hat und regulär ist, dann lässt sich das lineare Gleichungssystem $A\underline{x} = \underline{b}$ eindeutig rekursiv lösen.