Institut für Statistik und Ökonometrie, Freie Universität Berlin

Ökonometrische Analyse

Dieter Nautz, Gunda-Alexandra Detmers

Matrizen

Die folgenden Aufgaben dienen der Wiederholung der Matrixeigenschaften und -rechenregeln.

Aufgabe 1

Zeigen Sie: Wenn $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, dann ist $\mathbf{A}^2 = (a+d)\mathbf{A} - (ad - bc)\mathbf{I}$.

Aufgabe 2

a) Berechnen Sie das Matrizenprodukt: $\begin{pmatrix} x & y & z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & d & e \\ d & b & f \\ e & f & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$

b) Berechnen Sie das Matrizenprodukt: $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & d & e \\ d & b & f \\ e & f & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x & y & z \end{pmatrix}$

Aufgabe 3

a) Zeigen Sie, dass die folgende Matrix idempotent ist: $\begin{pmatrix} 2 & -2 & -4 \\ -1 & 3 & 4 \\ 1 & -2 & -3 \end{pmatrix}$

b) Zeigen Sie: Wenn $\mathbf{AB} = \mathbf{A}$ und $\mathbf{BA} = \mathbf{B}$, dann sind $\mathbf{A}$ und $\mathbf{B}$ beide idempotent.

c) Zeigen Sie: Wenn $\mathbf{A}$ idempotent ist, dann gilt $\mathbf{A}^n = \mathbf{A}$ für alle positiven Zahlen n.

Aufgabe 4

Wie muss k ϵ $\mathbb{R}$ gewählt werden, damit die Vektoren linear abhängig sind:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -4 \\ k \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 5

Für welche Werte von x sind $\begin{pmatrix} x & (-x-8) & x & x \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} x & 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$ orthogonal?

Aufgabe 6

Gegeben seien $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ und $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}$. Zeigen Sie, dass $|\mathbf{AB}| = |\mathbf{A}| \cdot |\mathbf{B}|$.

Aufgabe 7

Berechnen sie folgende Determinanten:

a) $\begin{vmatrix} a+b & a-b \\ a-b & a+b \end{vmatrix}$ b) $\begin{vmatrix} a & b & c \\ 0 & d & e \\ 0 & 0 & f \end{vmatrix}$ c) $\begin{vmatrix} a_1 - x & a_2 & a_3 & a_4 \\ 0 & -x & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -x & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -x \end{vmatrix}$

Aufgabe 8

Bestimmen Sie die Zahlen a und b, sodass $\mathbf{A}$ die Inverse von $\mathbf{B}$ wird:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ a & 1/4 & b \\ 1/8 & 1/8 & -1/8 \end{pmatrix} \text{ und } \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 6 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 9

Bestimmen Sie den Rang und die Inversen der folgenden Matrizen:

a) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 5 \\ 3 & 5 & 6 \end{pmatrix}$ c) $\begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 \\ -1 & 5 & 8 \\ -9 & -6 & 3 \end{pmatrix}$

Aufgabe 10

Nehmen Sie an, dass $\mathbf{A}$ und $\mathbf{B}$ invertierbare n×n Matrizen sind.

Zeigen Sie, dass wenn $\mathbf{A'A} = \mathbf{I}$, dann gilt $(\mathbf{A'BA}^{-1}) = \mathbf{A'B}^{-1}\mathbf{A}$.

Aufgabe 11

Zeigen Sie, dass $tr(\mathbf{AB}) = tr(\mathbf{BA})$ für folgende Matrizen gilt:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \text{ und } \mathbf{B} = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{pmatrix}$$

Aufgabe 12

Gemäß der Cauchy-Schwarz-Ungleichung gilt für zwei n-dimensionale Zeilenvektoren $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$:

$$|\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}'| \leq \|a\| \cdot \|b\|$$

Überprüfen sie die Ungleichung für die zwei Vektoren $\mathbf{a} = \begin{pmatrix} 3 & -5 & 2 \end{pmatrix}$ und $\mathbf{b} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 4 \end{pmatrix}$

Aufgabe 13

a) Zeigen Sie: Wenn λ Eigenwert von $\mathbf{A}$ ist, dann gilt $|\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}| = 0$.

b) Zeigen Sie: Jede n×n Matrix $\mathbf{A}$ hat höchstens n Eigenwerte.

c) Berechnen Sie mit Hilfe von a) die Eigenwerte von:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}, \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 5 & 0 \\ 3 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$