Institut für Statistik und Ökonometrie, Freie Universität Berlin

Ökonometrische Analyse

Dieter Nautz, Gunda-Alexandra Detmers

Rechenregeln für Matrizen

Notation und Matrixeigenschaften:

Eine Matrix A der Dimension $(N \times K)$ ist eine Matrix mit N Zeilen und K Spalten, wobei $[a_{nk}]$ das Element in der n-ten Zeile und der k-ten Spalte ist:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1K} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2K} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{N1} & a_{N2} & \cdots & a_{NK} \end{pmatrix}$$

Ein Vektor v der Dimension $(N \times 1)$ hat N Zeilen und 1 Spalte und wird als N-dimensionaler Spaltenvektor bezeichnet.

- Eine Matrix ist **quadratisch**, wenn $N = K$.
- Eine quadratische Matrix ist **symmetrisch**, wenn $a_{nk} = a_{kn}$ für alle n und k. In diesem Fall ist: $A = A'$.
- Eine quadratische Matrix ist **idempotent**, wenn $A^2 = AA = A$. Wenn A zudem symmetrisch ist, so gilt außerdem: $A'A = A$.
- Eine quadratische Matrix ist **diagonal**, wenn nur die Elemente auf der Hauptdiagonalen ungleich Null sind, sodass $a_{ij} = 0$ für alle $i \neq j$.
- Eine **Skalarmatrix** ist eine Diagonalmatrix mit gleichen Elementen auf der Hauptdiagonalen, sodass $A = c \cdot I$, wobei c ein Skalar.
- Bei einer **Einheitsmatrix** sind die Elemente auf der Hauptdiagonalen Einsen und alle weiteren Elemente gleich Null.
- Bei einer **Dreiecksmatrix** sind entweder die Elemente über (*untere Dreiecksmatrix*) oder unter der Hauptdiagonalen (*obere Dreiecksmatrix*) gleich Null.
- Bei Berechnung der **Transponierten** einer Matrix wird aus einer $(N \times K)$-Matrix eine $(K \times N)$-Matrix, bei der Zeilen und Spalten vertauscht werden. Bei quadratischen Matrizen wird eine Spiegelung an der Hauptdiagonalen durchgeführt:
  $A' = A^T = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix}$
  Es gilt:
  - $(A')' = A$
  - Die Transponierte eines Zeilenvektors ist ein Spaltenvektor; dementsprechend ist $v' = u$ ein Zeilenvektor mit 1 Zeile und N Spalten.

- Die **Determinante** einer Matrix ist nur für quadratische Matrizen definiert.
  - Die Determinante einer (1×1)-Matrix ist gleich ihrem einzigen Element.
  - Die Determinante einer (2×2)-Matrix $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$:
    $\det A = |A| = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$.
  - Die Determinante einer (3×3)-Matrix $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$ berechnet sich anhand der Sarrus-Regel:
    $\det A = |A| = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{31}a_{22}a_{13} - a_{32}a_{23}a_{11} - a_{33}a_{21}a_{12}$.
  - Die Determinante einer $(N \times N)$-Matrix berechnet sich wie folgt:

    $$\det A = |A| = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}(-1)^{i+j}|A_{ij}|$$

    wobei $|A_{ij}|$ ein Minor von A und $(-1)^{i+j}|A_{ij}|$ der Kofaktor C_{ij} von A.

  Es gilt:

  - $\det(AB)$=$\det(A)\det(B)$
  - $\det(A')$=$\det(A)$
  - $\det(cI)$= c^n $\det(I)$
  - Ist die Determinante von A gleich Null, so heißt A singuläre Matrix, welche nicht invertierbar ist. Ist die Determinante von Null verschieden, so ist A nichtsingulär bzw. regulär und invertierbar.

- Die **Spur** einer $(n \times n)$-Matrix ergibt sich als die Summe ihrer Diagonalelemente:

  $$tr(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}$$

  Es gilt:

  - $tr(A + B) = tr(A) + tr(B)$
  - $tr(AB) = tr(BA)$
  - $tr(A') = tr(A)$

- Die **Inverse** einer Matrix lässt sich ausschließlich für quadratische Matrizen berechnen, existiert jedoch nur für nicht-singuläre Matrizen. Das Produkt einer Matrix A mit ihrer Inversen A^{-1} erzeugt eine Einheitsmatrix derselben Ordnung. Die Inverse kann demnach über die Lösung eines linearen Gleichungssystems berechnet werden: $AA^{-1} = I$. Die Inverse einer (2×2)-Matrix ergibt sich dementsprechend als:

  $$A^{-1} = \frac{1}{|A|}\begin{pmatrix} a_{22} & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11} \end{pmatrix}$$

  Die einzelnen Elemente a_{ij} der Inverse einer $(N \times N)$-Matrix lassen sich mittels Kofaktoren bestimmen:

  $$a^{ij} = \frac{|Cij|}{|A|}$$

  Es gilt:

  - $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$
  - $(A')^{-1} = (A^{-1})'$
  - $(A^{-1})^{-1} = A$
  - $(cA)^{-1} = c^{-1}A^{-1}$

- Der **Rang** einer Matrix bestimmt sich durch die Anzahl an linear unabhängigen Spalten / Zeilen. Der Spaltenrang einer Matrix ist immer gleich ihrem Zeilenrang.

  Es gilt:

  - $rg(A) = rg(A')$
  - $rg(A'A) = rg(A)$
  - $rg(AB) \leq min[rg(A), rg(B)]$
  - Eine $(N \times K)$-Matrix hat vollen Rang, wenn $rg(A) = min(N, K)$.
  - Quadratische Matrizen ohne vollen Rang sind singuläre Matrizen.

- **Eigenwerte und Eigenvektoren**
  A sei eine $(n \times n)$-Matrix. Dann heißt λ 'Eigenwert von A', wenn gilt, dass $det(A - \lambda I_n) = 0$. Für jeden Eigenwert λ_i existiert ein $(n \times 1)$-Vektor e_i, der nicht der Nullvektor ist, sodass:

  $$(A - \lambda_i I_n)e_i = 0$$

  $$Ae_i = \lambda_i e_i$$

  e_i ist dann ein Eigenvektor der Matrix A zum Eigenwert λ_i.
  Es gilt:

  - Die Determinante von A ergibt sich als $det(A) = \prod_{i=1}^{n} \lambda_i$.
  - Die Spur der Matrix A ergibt sich als $tr(A) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i$

- **Definitheit** einer Matrix:

  - Eine Matrix ist positiv (semi-)definit, wenn für alle Vektoren v: $v'Av > 0$ $(v'Av \geq 0)$.
  - Eine Matrix ist negativ (semi-)definit, wenn für alle Vektoren v: $v'Av < 0$ $(v'Av \leq 0)$.
  - Ist die Matrix weder positiv noch negativ semidefinit, so ist die Matrix indefinit.

  Dabei sei A eine $(n \times n)$-Matrix und v ein $(n \times 1)$- Vektor, der ungleich dem Nullvektor ist.

Rechenregeln:

Im folgenden seien A, B und C Matrizen der Dimensionen $(N \times K)$, desweiteren sei v ein Vektor der Dimension $(N \times 1)$, u ein Vektor der Dimension $(1 \times N)$ und c ein Skalar.

- **Addition und Subtraktion** von Matrizen ist nur möglich für Matrizen der gleichen Ordnung:

  $$A \pm B = \begin{pmatrix} a_{11} \pm b_{11} & a_{12} \pm b_{12} & \cdots & a_{1K} \pm b_{1K} \\ a_{21} \pm b_{21} & a_{22} \pm b_{22} & \cdots & a_{2K} \pm b_{2K} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{N1} \pm b_{N1} & a_{N2} \pm b_{N2} & \cdots & a_{NK} \pm b_{NK} \end{pmatrix}$$

  Es gilt:

  * $A + B = B + A$
  * $(A + B) + C = A + (B + C)$
  * $(A + B)' = A' + B'$

- **Skalarmultiplikation**: Jede beliebige Matrix kann mit einem Skalar multipliziert werden, sodass jedes Element mit dem Skalar multipliziert wird:

$$cA = \begin{pmatrix} c \cdot a_{11} & c \cdot a_{12} & \cdots & c \cdot a_{1K} \\ c \cdot a_{21} & c \cdot a_{22} & \cdots & c \cdot a_{2K} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ c \cdot a_{N1} & c \cdot a_{N2} & \cdots & c \cdot a_{NK} \end{pmatrix}$$

  Es gilt:

  * $cA = Ac$
  * $(cA)' = cA'$
  * $c(A+B) = cA + cB$

- Die **Multiplikation von Matrizen** ist nur möglich, wenn die Spaltenanzahl der ersten Matrix der Zeilenanzahl der zweiten Matrix entspricht. Somit ist das Produkt von A und B nur definiert, wenn $N = K$. Das Produkt von A und B' ist aber definiert. Das Produkt einer $(N \times K)$-Matrix mit einer $(K \times N)$-Matrix ergibt eine $(N \times N)$-Matrix mit den Elementen $[m_{nn}] = \sum_{k=1}^{K} a_{nk} b_{kn}$.

$$AB' = \begin{pmatrix} \sum_{k=1}^{K} a_{1k}b_{k1} & \sum_{k=1}^{K} a_{1k}b_{k2} & \cdots & \sum_{k=1}^{K} a_{1k}b_{kN} \\ \sum_{k=1}^{K} a_{2k}b_{k1} & \sum_{k=1}^{K} a_{2k}b_{k2} & \cdots & \sum_{k=1}^{K} a_{2k}b_{kN} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \sum_{k=1}^{K} a_{Nk}b_{k1} & \sum_{k=1}^{K} a_{Nk}b_{k2} & \cdots & \sum_{k=1}^{K} a_{Nk}b_{kN} \end{pmatrix}$$

  Es gilt:

  * $A(B+C) = AB + AC$
  * $(AB)C = A(BC)$
  * $c(AB) = (cA)B = A(cB)$
  * $(AB)' = B'A'$
  * $AB \neq BA$

- **Multiplikation von Vektoren**: Während die Multiplikation eines $(N\times1)$-Spaltenvektors mit einem $(1\times N)$-Zeilenvektor eine $(N\times N)$-Matrix ergibt [*äußeres Produkt*], führt die Multiplikation eines $(1\times N)$-Zeilenvektors mit einem $(N\times1)$-Spaltenvektor zu einem Skalar [*inneres Produkt*].

$$u \cdot v = \begin{pmatrix} u_1 & \cdots & u_N \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_N \end{pmatrix} = \sum_{n=1}^{N} u_n v_n$$

  Es gilt:

  * Ist das Skalarprodukt zweier Vektoren gleich Null $(u \cdot v = 0)$, so heißen diese Vektoren zueinander orthogonal und man schreibt: $u \perp v$

– **Ableiten von Vektoren und Matrizen**: Im folgenden sei $N = K$, sodass A eine N-dimensionale quadratische Matrix ist. v ist weiterhin ein Vektor der Dimension $(N \times 1)$ und u ein Vektor der Dimension $(1 \times N)$.

  * $\frac{\partial(u \cdot v)}{\partial v} = u'$ und $\frac{\partial(v' \cdot u')}{\partial v} = u'$
  * $\frac{\partial(v'v)}{\partial v} = 2v$
  * $\frac{\partial(Av)}{\partial v} = A'$
  * $\frac{\partial(v'Av)}{\partial v} = (A + A')v$

    Wenn A symmetrisch ist, gilt: $\frac{\partial(v'Av)}{\partial v} = 2Av$
  * $\frac{\partial(v'Av)}{\partial A} = v'v$