# Die Black–Scholes–Differentialgleichung

Lutz Kruschwitz und Maria Stefanova

10. September 2007

## Inhaltsverzeichnis



# 1 Einführung

Wenn es um die präferenzfreie Bewertung von Optionen in stetiger Zeit geht, ist das von *Fischer Black* und *Myron Scholes* entwickelte Modell aus dem akademischen Unterricht nicht mehr wegzudenken. Weil man sich dieses Modell ohne verhältnismäßig anspruchsvolle Mathematik nicht wirklich aneignen kann, wird der bahnbrechende Beitrag von *Black* und *Scholes* leider allzu oft auf wenige Preisgleichungen einfacher Optionen reduziert. Besonders populär sind die im Falle europäischer Optionen auf Aktien ohne Dividenden vorhandenen geschlossenen Bewertungsgleichungen. Das Kernstück des Modells besteht jedoch in der so genannten *Black–Scholes*–Fundamentalgleichung. Damit ist eine partielle Differentialgleichung gemeint, der buchstäblich alle Derivate, also sowohl einfache Plain-Vanilla-Optionen als auch beispielsweise amerikanische oder exotische Optionen, genügen müssen.

In diesem Beitrag wollen wir in leicht verständlicher Weise zeigen, wie die Differentialgleichung hergeleitet wird. Es folgt eine beispielhafte Anwendung auf zwei der im akademischen Unterricht am häufigsten behandelten Derivate. Aus der Gruppe der unbedingten Termingeschäfte betrachten wir einen Forward, aus dem Bereich der Optionen diskutieren wir eine europäische Verkaufsoption. Im letzten Abschnitt des Aufsatzes beschreiben wir einen Zugang zum Lemma von *Itô*, einem für die Herleitung der Fundamentalgleichung unentbehrlichen mathematischen Satz.

# 2 Delta–Hedging

Es gibt zwei Wege zur Herleitung der Fundamentalgleichung im *Black–Scholes*–Modell. Entweder versucht man, die zustandsabhängigen Zahlungen des Derivats unter Verwendung des Basistitels und eines risikolosen Assets zu duplizieren, oder man konstruiert ein Portfolio aus dem Derivat und dem Basistitel derart, dass es risikolos wird (Delta–Hedging). Beide Wege sind im Ergebnis vollkommen äquivalent. Im Folgenden werden wir den zweiten Weg gehen und eine geeignete Portfoliostruktur bestimmen, die – zumindest für einen Augenblick – die vollständige Absicherung gegen Preisschwankungen des Basistitels bietet. Die Analyse findet in stetiger Zeit statt. Man kann sie nur vornehmen, wenn man Grundkenntnisse über stochastische Prozesse besitzt und gewisse

Regeln kennt, wie mit ihnen zu rechnen ist. Die erforderlichen mathematischen Werkzeuge werden weitestgehend erläutert und ökonomisch begründet.

## 2.1 Der Prozess für den Preis des Basistitels

Ein theoretisches Modell zur Bewertung derivativer Titel beginnt mit einer Annahme über den Preisprozess des Basistitels. Im Folgenden wird stets von einer Aktie als Basistitel ausgegangen, die Ergebnisse lassen sich aber auch auf andere Wertpapiere übertragen. Bei *Black* und *Scholes* wird der Aktienkurs als *geometrische Brownsche Bewegung* modelliert. Letztere ist Lösung der stochastischen Differentialgleichung

$$dS = \mu\, S\, dt + \sigma\, S\, dz \tag{1}$$

$$\text{mit } dz = \varepsilon\sqrt{dt} \text{ und } \varepsilon \sim N(0,1).$$

Die Parameter $\mu$ und $\sigma^2$ bezeichnen die erwartete Momentanrendite der Aktie beziehungsweise den Zuwachs der Varianz dieser Aktienrendite pro Zeiteinheit. Besondere Aufmerksamkeit verdient der elementare *Wiener*–Prozess $dz$, welcher das Risiko im Modell widerspiegelt. Dieser Störterm ist eine normalverteilte Zufallsvariable mit Erwartungswert 0 und Varianz von $dt$ pro Zeiteinheit. Störterme aufeinander folgender Zeitintervalle sind unabhängig und identisch verteilt. Abbildung 1 zeigt drei mögliche Pfade für den Aktienkurs gemäß dem hier beschriebenen Modell.

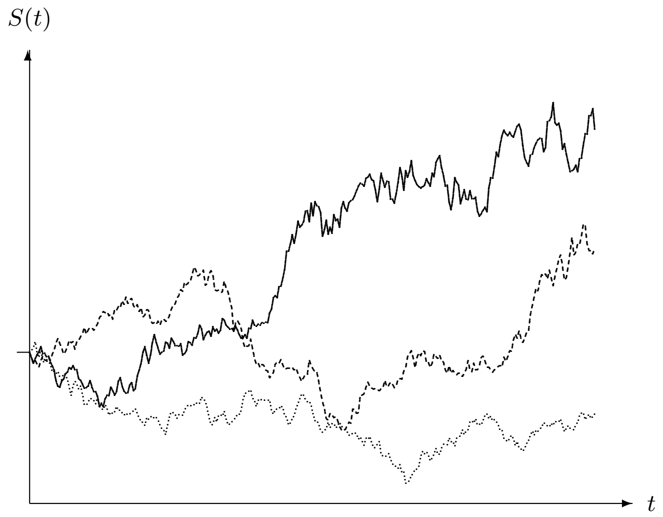


Abbildung 1: Drei Pfade eines zeitstetigen Prozesses

## 2.2 Der Prozess für den Preis des Derivats

Wir nennen den Preis eines beliebigen Derivats $V$ und machen uns klar, dass seine Veränderung stets von zwei Größen abhängt, nämlich dem Preis des Basistitels $S$ und der Zeit $t$. Die erste Variable ist stochastisch, die zweite deterministisch. Für die Bewertung des Derivats benötigen wir eine allgemeine Darstellung seiner Wertänderung $dV$ infolge einer infinitesimalen Änderung der beiden unabhängigen Variablen $S$ und $t$. Man braucht also einen mathematischen Satz über das "totale Differential" einer solchen Funktion. Hier müssen wir das *Itô*–Lemma benutzen. Danach ist der Preisprozess des Derivats durch

$$dV = \frac{\partial V}{\partial S}\, dS + \frac{\partial V}{\partial t}\, dt + \frac{1}{2}\,\frac{\partial^2 V}{\partial S^2}\,(\sigma\, S)^2\, dt \tag{2}$$

spezifiziert. Ein strikter Beweis des Zusammenhangs kann an dieser Stelle nicht erfolgen, der letzte Abschnitt unseres Aufsatzes bietet aber einen intuitiven Zugang zum Lemma von *Itô* als Erweiterung der konventionellen Differentialrechnung. Indem man (1) in Gleichung (2) einsetzt, macht man sich leicht klar, dass beide Preisprozesse von demselben elementaren *Wiener*–Prozess $dz$ abhängen.

### 2.3 Arbitragefreie Bewertung

Die Grundidee von *Black* und *Scholes* besteht darin, das Derivat und die Aktie in einem Portfolio so miteinander zu mischen, dass das Risiko verschwindet. Die einzige Unsicherheitsquelle, die sowohl der Aktie als auch dem Derivat zugrunde liegt, ist der elementare *Wiener*–Prozess $dz$. Die perfekte Korrelation von $S$ und $V$ innerhalb des infinitesimalen Zeitintervalls $dt$ erlaubt es, eine momentan risikolose Position einzunehmen, welche sich in einer arbitragefreien Ökonomie mit dem risikolosen Zinssatz verzinsen muss. Die Existenz eines solchen Zinssatzes wird vorausgesetzt. Weiterhin wird unterstellt, dass dieser Zinssatz $r$ über alle Laufzeiten konstant ist.

Wir bezeichnen die Zahl der Aktien im Hedge–Portfolio mit $\omega_S$ und die Zahl der Derivate mit $\omega_V$. Ein solches Portfolio hat einen Wert von

$$\Pi = \omega_S\, S + \omega_V\, V\,. \tag{3}$$

Seine Wertänderung innerhalb des infinitesimalen Zeitintervalls $dt$ beträgt

$$d\Pi = \omega_S\, dS \; + \omega_V\, dV\,.$$

Nun stellen wir die Frage, welche Menge des Basistitels in das Portfolio aufgenommen werden muss, damit eine durch $\omega_V$ charakterisierte Short–Position perfekt abgesichert wird. Zu diesem Zweck brauchen wir nur $\omega_V = -1$ zu verwenden und den durch Gleichung (2) beschriebenen Preisprozess einzusetzen. So erhalten wir die Portfoliodynamik

$$d\Pi = \omega_S\, dS - \frac{\partial V}{\partial S}\, dS - \frac{\partial V}{\partial t}\, dt - \frac{1}{2}\,\frac{\partial^2 V}{\partial S^2}\,(\sigma S)^2\; dt\,.$$

Das Portfolio bleibt risikobehaftet, solange seine Wertänderung von der Aktienkursdynamik bestimmt wird. Damit dieser Einfluss verschwindet, muss die Zahl der Aktien im Hedge–Portfolio offensichtlich so gewählt werden, dass $\omega_S = \frac{\partial V}{\partial S}$ ist. Die Wertänderung des Portfolios ist nun deterministisch. Sie hängt nur noch von der Zeit ab,

$$d\Pi = -\frac{\partial V}{\partial t}\, dt - \frac{1}{2}\,\frac{\partial^2 V}{\partial S^2}\,(\sigma S)^2\; dt\,. \tag{4}$$

Wenn Arbitragegelegenheiten ausgeschlossen sind, entspricht die Portfoliorendite dem risikolosen Zinssatz, so dass

$$d\Pi = \Pi\, r\, dt\,. \tag{5}$$

gelten muss. Einsetzen von (3) und (4) in (5) ergibt

$$\frac{\partial V}{\partial t} + r\, S\,\frac{\partial V}{\partial S} + \frac{1}{2}\,\frac{\partial^2 V}{\partial S^2}\,(\sigma\, S)^2\; = r\, V\,. \tag{6}$$

Das ist die partielle Differentialgleichung, die jedes Derivat erfüllen muss, welches nur vom Basistitel $S$ und von der Zeit $t$ abhängt. Interessanterweise ist die erwartete Momentanrendite des Basistitels ($\mu$) nicht in der Gleichung enthalten. Um die theoretisch korrekten Preise von Derivaten zu ermitteln, benötigt man keine Informationen über die Risikoeinstellung der Marktteilnehmer. Die Preisbestimmung erfolgt präferenzfrei. In dieser Erkenntnis liegt die große ökonomische Leistung von *Black* und *Scholes*. Wie die Fundamentalgleichung bei der Bewertung von Derivaten einzusetzen ist, wird im nächsten Abschnitt genauer beschrieben.

# 3 Diskussion ausgewählter Bewertungsgleichungen

Wer den theoretischen Preis berechnen will, den rationale Marktteilnehmer für ein bestimmtes Derivat unter den Bedingungen des *Black–Scholes*–Modells zu zahlen bereit sind, muss "nur" die partielle Differentialgleichung (6) lösen. Prinzipiell hat diese Gleichung unendlich viele Lösungen. Eindeutig wird eine Lösung dadurch, dass man spezifische End– und Randbedingungen verwendet, die das jeweilige Derivat genau charakterisieren. Solche Bedingungen geben beispielsweise an, welchen Wert das Derivat annimmt, wenn man das Ende seiner Laufzeit betrachtet.

Nach Möglichkeit sucht man nach geschlossenen (analytischen) Lösungen der Fundamentalgleichung, da diese sich besonders leicht auswerten lassen. Bei vielen Derivaten misslingt das allerdings, so dass die Lösung der Differentialgleichung unter Beachtung der End– und Randbedingungen nur numerisch vorgenommen werden kann. Dann verwendet man entweder die Monte–Carlo–Simulation oder ein Verfahren der finiten Differenzen (vgl. dazu beispielsweise *Wilmott, Dewynne und Howison* (1995)). Es kann nicht unser Ziel sein, die Leser dieses Beitrags damit vertraut zu machen, wie man dort, wo es möglich ist, vorgeht, um eine konkrete (geschlossene) Bewertungsgleichung für ein bestimmtes Derivat aufzustellen. Daher wollen wir den umgekehrten Weg gehen und anhand von zwei Beispielen überprüfen, ob die Bewertungsgleichungen, welche in der Literatur für das jeweilige Derivat angegeben werden, korrekt sind.

## 3.1 Gewöhnlicher Forward

Der Halter eines gewöhnlichen Forwards muss am Ende der Laufzeit den vereinbarten Preis $K$ bezahlen und bekommt als Gegenleistung den Basistitel. Die für den Forward charakteristische Endbedingung lautet unter Beibehaltung der bisherigen Symbolik

$$V = S - K\,. \tag{7}$$

Sollte am Fälligkeitstermin der dann geltende Aktienkurs den vereinbarten Preis übersteigen ($S > K$), so erzielt der Inhaber des Forwards einen Gewinn, andernfalls ($S \leq K$) wird ein Verlust realisiert. Die Bewertungsgleichung für einen gewöhnlichen Forward lautet

$$V = S - K\,e^{-r(T-t)}\,, \tag{8}$$

wobei $T - t$ die Restlaufzeit repräsentiert. Vorstehende Bewertungsgleichung kann mit Hilfe einfacher Arbitrageargumente gewonnen werden (vgl. beispielsweise *Hull* (2006), S. 145). Wenn diese Lösung allerdings korrekt sein sollte, so muss sie auch die Fundamentalgleichung erfüllen. Um das zu überprüfen, müssen wir zeigen, dass vorstehende Gleichung für $t \to T$ die Endbedingung (7) und im Übrigen die *Black–Scholes*–Differentialgleichung (6) erfüllt.

Die erste Aufgabe ist sehr leicht. Wir setzen die Restlaufzeit $T - t$ einfach null und erhalten bereits

$$V = S - K\,e^{-r\cdot 0} = S - K\,.$$

Die zweite Aufgabe ist nicht wesentlich schwieriger. Wir brauchen allerdings die Ableitungen der mit (8) beschriebenen Preisfunktion nach $S$ und $t$. Diese ergeben sich zu

$$\begin{aligned} \frac{\partial V}{\partial S} &= 1,\\ \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} &= 0,\\ \frac{\partial V}{\partial t} &= -r\,K\,e^{-r(T-t)}\,. \end{aligned}$$

Einsetzen dieser Ergebnisse in die Differentialgleichung (6) führt auf

$$-r\,K\,e^{-r(T-t)} + r\,S = r\,\left(S - K\,e^{-r(T-t)}\right).$$

Und diese Gleichung ist offensichtlich erfüllt. Damit haben wir gezeigt, dass die Bewertungsgleichung (8) tatsächlich den fairen oder arbitragefreien Preis eines Forwards im Modell von *Black* und *Scholes* wiedergibt.

## 3.2 Europäischer Put

Nun gehen wir zu einem komplizierteren Fall über und betrachten eine europäische Verkaufsoption auf den Basistitel. Der Inhaber des Puts hat das Recht, den zugrunde liegenden Titel zum vereinbarten Preis $K$ zu verkaufen, wenn die Option fällig ist. Da er das Optionsrecht nicht ausüben muss, haben wir es unter erneuter Verwendung der bisherigen Symbolik mit der Endbedingung

$$V = \max(0, K - S) \tag{9}$$

zu tun. Wenn bei Fälligkeit der Option $K > S$ ist, erzielt der Inhaber der Verkaufsoption einen Gewinn in Höhe von $K - S$. Falls dagegen $K < S$ ist, so hat der Put einen Wert in Höhe von null. Die Bewertungsgleichung für den Put im Rahmen des *Black–Scholes*–Modells lautet

$$V = K\,e^{-r(T-t)}\left(1 - N(d_2)\right) - S\left(1 - N(d_1)\right). \tag{10}$$

Dabei steht $N(\cdot)$ für die Standardnormalverteilung. Die Argumente der Funktion sind mit

$$d_1 = \frac{\ln\frac{S}{K} + (r + 0.5\,\sigma^2)\,(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}, \tag{11}$$

$$d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{T-t} \tag{12}$$

definiert. Nun ist es nicht mehr ganz so einfach, den Nachweis zu führen, dass (10) sowohl die Endbedingung (9) als auch die Fundamentalgleichung (6) erfüllt.

Um zu prüfen, ob die Endbedingung (9) erfüllt ist, betrachten wir die Grenzwerte der Terme $N(d_1)$ und $N(d_2)$ für den Fall $t \to T$. Es gilt

$$\begin{aligned}
\lim_{t\to T} d_1 &= \lim_{t\to T} \frac{\ln\frac{S}{K}}{\sigma\sqrt{T-t}} + \lim_{t\to T} \frac{r + 0.5\sigma^2}{\sigma}\sqrt{T-t} \\
&= \begin{cases} +\infty, & \text{wenn } K < S \\ 0, & \text{wenn } K = S \\ -\infty, & \text{wenn } K > S \end{cases} .
\end{aligned}$$

Weil außerdem

$$\lim_{t\to T} d_2 = \lim_{t\to T} d_1 - \lim_{t\to T} \sigma\sqrt{T-t} = \lim_{t\to T} d_1$$

gilt, folgt sofort

$$\lim_{t\to T}\left(1 - N(d_1)\right) = \lim_{t\to T}\left(1 - N(d_2)\right) = \begin{cases} 0 & \text{wenn } K < S \\ 0.5 & \text{wenn } K = S \\ 1 & \text{wenn } K > S \end{cases} .$$

Da nun ferner $\lim_{t\to T} K\,e^{-r(T-t)} = K$ ist, kommen wir zu dem Ergebnis

$$\lim_{t\to T} V = \begin{cases} K\cdot 0 - S\cdot 0 = 0 & \text{wenn } K < S \\ K\cdot 0.5 - S\cdot 0.5 = 0 & \text{wenn } K = S \\ K - S & \text{wenn } K > S \end{cases} ,$$

und damit ist die Endbedingung offensichtlich erfüllt.

Um uns dem zweiten Teil des Problems zuwenden zu können, benötigen wir die Ableitungen der relevanten Bewertungsgleichung nach $S$ und $t$.

1. *Erste Ableitung nach $S$:* Differenziert man die Bewertungsgleichung (10) nach $S$, erhält man zunächst
$$\frac{\partial V}{\partial S} = -K\,e^{-r(T-t)}\,N'(d_2)\,\frac{\partial d_2}{\partial S} - \big(1 - N(d_1)\big) + S\,N'(d_1)\,\frac{\partial d_1}{\partial S}\,. \tag{13}$$
Erinnern wir uns daran, dass $N(\cdot)$ die Funktion der Standardnormalverteilung ist, so bezeichnet die Ableitung $N'(\cdot)$ die entsprechende Dichte. Nun gilt
$$\frac{\partial d_1}{\partial S} = \frac{\partial d_2}{\partial S} = \frac{1}{S\sigma\sqrt{T-t}}\,, \tag{14}$$
und außerdem ist
$$S\,N'(d_1) = K\,e^{-r(T-t)}\,N'(d_2)\,, \tag{15}$$
was wir noch genauer zeigen werden. Setzen wir aber erst einmal (14) und (15) in (13) ein, so gewinnen wir den einfachen Ausdruck
$$\frac{\partial V}{\partial S} = -\big(1 - N(d_1)\big) = -N(-d_1)\,.$$
Wir müssen also nur noch zeigen, dass Gleichung (15) gilt. Dazu betrachten wir das Verhältnis der beiden Dichtefunktionen $N'(d_1)$ und $N'(d_2)$. Unter Einbeziehung der Faktoren $d_1$ und $d_2$ gemäß ihrer Definitionen (11) und (12) erhält man nach geeigneter Umformung den Zusammenhang
$$\begin{aligned}\frac{N'(d_1)}{N'(d_2)} &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\,e^{-0.5(d_1)^2} \Big/ \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\,e^{-0.5(d_2)^2}\\ &= \frac{K}{S}\,e^{-r(T-t)}\,.\end{aligned}$$

2. *Zweite Ableitung nach $S$:* Nochmaliges Differenzieren der Bewertungsgleichung nach $S$ führt auf
$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 V}{\partial S^2} &= N'(d_1)\,\frac{\partial d_1}{\partial S}\\ &= N'(d_1)\,\frac{1}{S\,\sigma\sqrt{T-t}}\,.\end{aligned}$$

3. *Erste Ableitung nach $t$:* Diese Ableitung erfordert mehr Aufmerksamkeit. Wir erhalten zunächst
$$\frac{\partial V}{\partial t} = r\,K\,e^{-r(T-t)}\,\big(1 - N(d_2)\big) - K\,e^{-r(T-t)}\,N'(d_2)\,\frac{\partial d_2}{\partial t} + S\,N'(d_1)\,\frac{\partial d_1}{\partial t}.$$
Hierfür kann man unter Rückgriff auf (15)
$$\frac{\partial V}{\partial t} = K\,e^{-r(T-t)}\,\left(\left(\frac{\partial d_1}{\partial t} - \frac{\partial d_2}{\partial t}\right)\,N'(d_2) + r\,\big(1 - N(d_2)\big)\right)$$
schreiben. Benutzt man die Ableitungen
$$\begin{aligned}\frac{\partial d_1}{\partial t} &= \frac{0.5\ln\frac{S}{K}}{\sigma(T-t)\sqrt{T-t}} + \frac{-0.5\,(r+0.5\sigma^2)}{\sigma\sqrt{T-t}}\\ \frac{\partial d_2}{\partial t} &= \frac{0.5\ln\frac{S}{K}}{\sigma(T-t)\sqrt{T-t}} + \frac{-0.5\,(r-0.5\sigma^2)}{\sigma\sqrt{T-t}}\,,\end{aligned}$$

und ihre Differenz

$$\frac{\partial d_1}{\partial t} - \frac{\partial d_2}{\partial t} = \frac{-\sigma}{2\sqrt{T-t}} \,,$$

erhält man endlich die gesuchte Ableitung nach der Zeit

$$\frac{\partial V}{\partial t} = K\, e^{-r(T-t)} \left( \frac{-\sigma}{2\sqrt{T-t}}\, N'(d_2) + r\,(1 - N(d_2)) \right).$$

Setzt man die drei Ableitungen zusammen mit der Lösung für $V$ selbst in die Differentialgleichung (6) ein, so erhält man nach Weglassen sich gegenseitig aufhebender Summanden

$$-K\, e^{-r(T-t)} \frac{\sigma}{2\sqrt{T-t}}\, N'(d_2) + 0.5\, \sigma^2\, S^2\, N'(d_1) \frac{1}{S\, \sigma \sqrt{T-t}} = 0\,.$$

Dass diese Gleichung erfüllt sein soll, ist nicht sofort ersichtlich. Unverdrossen vereinfachen wir sie durch Kürzen und erinnern uns an die Beziehung zwischen $d_1$ und $d_2$. Dann heißt es schon wesentlich übersichtlicher

$$S\, N'(d_1) - K\, e^{-r(T-t)}\, N'(d_1 - \sigma\sqrt{T-t}) = 0.$$

Jetzt kommen wir nur weiter, wenn wir die Dichtefunktion $N'(\cdot)$ explizit machen, also

$$S\, \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\, e^{-0.5 d_1^2} - K\, e^{-r(T-t)}\, \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\, e^{-0.5 d_1^2}\, e^{d_1 \sigma \sqrt{T-t}}\, e^{-0.5\sigma^2 (T-t)} = 0\,.$$

Nach weiterer Vereinfachung und Einsetzen von $d_1$ entsprechend Gleichung (11) wird daraus

$$\begin{aligned} S - K\, e^{-r(T-t)}\, e^{d_1 \sigma \sqrt{T-t}}\, e^{-0.5\sigma^2 (T-t)} &= 0 \\ S - K\, e^{-r(T-t)}\, \frac{S}{K}\, e^{r(T-t)}\, e^{0.5\sigma^2 (T-t)}\, e^{-0.5\sigma^2 (T-t)} &= 0. \end{aligned}$$

Nun ist die Identität offensichtlich. Wir haben gezeigt, dass die Bewertungsgleichung für den Put (10) tatsächlich seinem arbitragefreien Preis in der *Black–Scholes*–Ökonomie entspricht.

# 4 Itôs Lemma

Im Abschnitt 2.2 haben wir den Prozess für den Preis eines Derivats abgeleitet, indem wir $V$ als Funktion des Basistitels $S$ und der Zeit $t$ behandelt haben. Das gelang uns unter Verwendung eines Ergebnisses der stochastischen Differentialrechnung, das als *Itô*–Lemma bekannt ist.

Im Zusammenhang mit der Bewertung von Derivaten hat man es häufig mit Funktionen der Art

$$y = V(S, t) \tag{16}$$

zu tun. Es handelt sich um Funktionen in zwei Veränderlichen, von denen die eine ($S$) eine Zufallsvariable und die andere ($t$) eine deterministische Variable ist. Konkret ist hier der Aktienkurs – oder allgemeiner der Preis des zugrunde liegenden Basistitels – die Zufallsvariable und die Zeit die deterministische Variable. *Itôs* Lemma (vgl. *Itô* (1951)) ist ein mathematischer Satz über das totale Differential einer solchen Funktion. Ein strenger Beweis des Theorems kann hier nicht durchgeführt werden, vielmehr werden bekannte Ergebnisse der Differentialrechnung ausgebaut und auf den Fall stochastischer Variablen und Funktionen solcher Variablen übertragen.

## 4.1 Fragestellung und Resultat

Aus der Analysis ist bekannt, dass das totale Differential einer stetigen, differenzierbaren Funktion in zwei Veränderlichen

$$y = f(x, t)$$

in der Form

$$dy = df = \frac{\partial f}{\partial x}\, dx + \frac{\partial f}{\partial t}\, dt \tag{17}$$

gegeben ist. Im Folgenden übertragen wir dieses Konzept auf eine stetige, differenzierbare Funktion vom Typ (16). Von der Zufallsvariablen $S$ wird angenommen, dass sie einem standardisierten *Wiener*–Prozess folgt,

$$dS = \mu\, dt + \sigma\, dz \tag{18}$$

$$= \mu\, dt + \sigma\, \varepsilon \sqrt{dt}\,. \tag{19}$$

Am Rande sei bemerkt, dass die zugrunde liegende Zufallsvariable sogar einem *Itô*–Prozess

$$dS = \mu(S, t)dt + \sigma(S, t)dz$$

folgen kann, also die Prozessparameter $\mu$ und $\sigma$ selbst Funktionen von $S$ und $t$ sein können. Das würde die Gültigkeit der Ergebnisse dieses Abschnitts nicht ändern. Wir konzentrieren uns auf den Prozess (19) als Spezialfall eines *Itô*–Prozesses mit konstanten Parametern $\mu$ und $\sigma$. Die Variable $\varepsilon$ ist standardnormalverteilt, hat also den Erwartungswert $\mathrm{E}[\varepsilon] = 0$ und die Varianz $\mathrm{Var}[\varepsilon] = 1$. Die marginale Veränderung der Zeit wird wie bisher mit $dt$ bezeichnet. Unter diesen Voraussetzungen beläuft sich das totale Differential der stochastischen Funktion $y = V(S, t)$ auf

$$dy = dV = \left( \frac{\partial V}{\partial S}\, \mu + \frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 V}{\partial S^2}\, \sigma^2 \right) dt + \frac{\partial V}{\partial S}\, \sigma\, dz\,, \tag{20}$$

was wir nun detaillierter zeigen werden.

## 4.2 Herleitung des Lemmas

Zu diesem Zweck definieren wir eine infinitesimale Veränderung der Funktion $V(S, t)$ mit

$$dV = V(S + dS, t + dt) - V(S, t)\,,$$

wobei $dS$ durch den Zufallsprozess (19) gegeben ist. Da uns die Veränderung der Funktion $V$ infolge einer Veränderung beider zugrunde liegenden Variablen $S$ und $t$ interessiert, nehmen wir eine Reihenentwicklung von $V(S + dS, t + dt)$ bis zur zweiten Ableitung an der Stelle $(S, t)$ vor. Das ergibt

$$dV = \frac{\partial V}{\partial S} dS + \frac{\partial V}{\partial t} dt + \underbrace{\frac{1}{2} \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} (dS)^2}_{\text{Term 1}} + \underbrace{\frac{\partial^2 V}{\partial S \partial t} dS dt}_{\text{Term 2}} + \underbrace{\frac{1}{2} \frac{\partial^2 V}{\partial t^2} (dt)^2}_{\text{Term 3}} + o(dt). \tag{21}$$

In vorstehender Gleichung ist $o(dt)$ das so genannte *Landau*–Symbol und repräsentiert einen Term, der mit höherer Ordnung als $dt$ gegen null geht. Mit dieser Schreibweise bezieht man sich auf den Fehlerterm der Approximation und verdeutlicht, dass dieser vernachlässigbar klein gegenüber dem angegebenen Ausdruck ist. Wegen weiterer Einzelheiten zum *Landau*–Symbol verweisen wir auf *Fichtenholz* (1989), S. 128 ff.

In Gleichung (21) bezeichnet $dV$ eine infinitesimale Veränderung der Funktion $V(S, t)$ infolge einer Veränderung der Zufallsvariablen um $dS$ und einer Veränderung der Zeit um $dt$. Neben dem mit $o(dt)$ gekennzeichneten Term finden sich aber noch weitere Terme, die mit höherer Ordnung gegen null gehen. Diese müssen wir zunächst identifizieren. Wir analysieren daher die mit den Ziffern 1 bis 3 gekennzeichneten Terme der Gleichung (21) genauer.

1. Zunächst ist klar, dass im dritten Term $(dt)^2 = o(dt)$ ist.
2. Genauer hinsehen muss man bei dem Ausdruck $dSdt$ in Term 2. Für diesen gilt, wenn man den Zufallsprozess (19) einsetzt, aber auch
$$\begin{aligned} dSdt &= \left(\mu\, dt + \sigma\, \varepsilon \sqrt{dt}\right)\, dt \\ &= \mu\, (dt)^2 + \sigma\, \varepsilon \sqrt{dt}\, dt \\ &= o(dt)\, . \end{aligned}$$
3. Noch mehr Aufmerksamkeit verdient der Ausdruck $(dS)^2$ in Term 1. Für diesen gilt bei dem zugrunde liegenden Zufallsprozess nämlich
$$\begin{aligned} (dS)^2 &= \left(\mu\, dt + \sigma\, \varepsilon \sqrt{dt}\right)^2 \\ &= \mu^2 (dt)^2 + 2\, \mu\, \sigma\, \varepsilon\, dt \sqrt{dt} + \sigma^2 \varepsilon^2\, dt\, . \end{aligned}$$
Die ersten beiden Ausdrücke sind Terme größerer Ordnung als $dt$, der dritte aber nicht. Daher haben wir
$$(dS)^2 = o(dt) + \sigma^2 \varepsilon^2\, dt\, .$$

Unter Berücksichtigung aller dieser Ergebnisse, können wir (21) bereits in der stark vereinfachten Form
$$dV = \frac{\partial V}{\partial S}\, dS + \frac{\partial V}{\partial t}\, dt + \frac{1}{2}\, \frac{\partial^2 V}{\partial S^2}\, \sigma^2\, \varepsilon^2\, dt + o(dt) \tag{22}$$
schreiben. Um weiterzukommen, konzentrieren wir uns auf den Term $\varepsilon^2\, dt$. Definitionsgemäß ist $\varepsilon$ eine standardnormalverteilte Zufallsvariable. Das bedeutet
$$\mathrm{Var}\,[\varepsilon] = \mathrm{E}\, \left[(\varepsilon - \mathrm{E}\,[\varepsilon])^2\right] = \mathrm{E}\, \left[\varepsilon^2\right] = 1\, ,$$
woraus
$$\mathrm{E}\, \left[\varepsilon^2\, dt\right] = \mathrm{E}\, \left[\varepsilon^2\right]\, dt = dt \tag{23}$$
folgt. Damit ergibt sich der Erwartungswert von $\varepsilon^2\, dt$ gerade als $dt$. Darüber hinaus betrachten wir die Varianz von $\varepsilon^2\, dt$,
$$\begin{aligned} \mathrm{Var}\,[\varepsilon^2\, dt] &= \mathrm{E}\, \left[\left(\varepsilon^2\, dt - \mathrm{E}\,[\varepsilon^2\, dt]\right)^2\right] \\ &= \mathrm{E}\, \left[\left(\varepsilon^2\, dt - dt\right)^2\right] \\ &= \mathrm{E}\, \left[(\varepsilon^4 - 2\, \varepsilon^2 + 1)(dt)^2\right] \\ &= o(dt)\, . \end{aligned}$$
Da die Zufallsvariable $\varepsilon^2\, dt$ den Erwartungswert $dt$ besitzt und ihre Varianz mit höherer Ordnung gegen null geht, kann sie durch $dt$ approximiert werden.

Für das Differential $dV$ erhalten wir unter Vernachlässigung aller Terme höherer Ordnung
$$dV = \frac{\partial V}{\partial S}\, dS + \frac{\partial V}{\partial t}\, dt + \frac{1}{2}\, \frac{\partial^2 V}{\partial S^2}\, \sigma^2\, dt\, . \tag{24}$$
Das ist bereits *Itôs* Lemma. Setzt man für $dS$ den standardisierten *Wiener*–Prozess ein, so entsteht daraus nach einfacher Umformung die in Gleichung (20) angegebene Darstellung.

Interessant ist noch der Vergleich der Differentiale (17) und (24). Für den Fall, dass $S$ eine Zufallsvariable ist, die einem standardisierten *Wiener*–Prozess folgt, muss man bei der Ermittlung des totalen Differentials der Funktion gegenüber dem deterministischen Fall zusätzlich den Term $\frac{1}{2}\,\frac{\partial^2 V}{\partial S^2}\,\sigma^2\,dt$ berücksichtigen. Das ergibt sich, weil $S$ keine "echte" unabhängige Variable ist, sondern wieder von der zweiten Variablen, der Zeit $t$, abhängt. So gesehen ist das totale Differential einer Funktion deterministischer Variablen nichts anderes als ein Spezialfall von *Itôs* Lemma.

Schließlich wollen wir den von *Black* und *Scholes* angenommenen Aktienkursverlauf, bestimmt durch die stochastische Differentialgleichung (1), betrachten. Man mache sich klar, dass es nun nicht der Aktienkurs, sondern vielmehr die momentane Aktienrendite ist, die dem standardisierten *Wiener*–Prozess folgt. *Itôs* Lemma ergibt in diesem Fall

$$dV = \frac{\partial V}{\partial S}\,dS + \frac{\partial V}{\partial t}\,dt + \frac{1}{2}\,\frac{\partial^2 V}{\partial S^2}\,(\sigma S)^2\,dt\,.$$

Vergleicht man das mit (24), so hat man nur im letzten Term den zusätzlichen Faktor $S^2$.

# 5 Zusammenfassung

Im Zentrum der bahnbrechenden Arbeit von *Black* und *Scholes* steht eine fundamentale Differentialgleichung. Diese ist für alle Derivate gültig, deren Preis vom unsicheren Preis eines Basistitels und der Zeit abhängt, wenn man unterstellt, dass der Preis des Basistitels einer geometrischen *Brownschen* Bewegung folgt und der Kapitalmarkt arbitragefrei ist. Es wird gezeigt, wie diese Differentialgleichung gewonnen werden kann. Ferner wird für zwei ausgewählte Derivate nachgewiesen, dass ihre Bewertungsgleichungen die Fundamentalgleichung erfüllen.

# Literatur


Black, Fischer und Scholes, Myron S. (1973) "The pricing of options and corporate liabilities", *Journal of Political Economy*, 81, 637–654.

Fichtenholz, Gregor Michailowitsch (1989) *Differential– und Integralrechnung*, Band 1, 13. Auflage, Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin.

Hull, John C. (2006) *Options, Futures und andere Derivate*, 6. Auflage, Pearson, München, Boston, San Francisco.

Itô, Kiyosi (1951) "On stochastic differential equations", *Memoirs of the American Statistical Society*, 4, 1–51.

Kruschwitz, Lutz und Ketzler, Rolf (2003) "Bewertung von Derivaten mit finiten Differenzen", *Wirtschaftswissenschaftliches Studium*, 32, 642–648.

Rudolph, Bernd und Schäfer, Klaus (2005) *Derivative Finanzmarktinstrumente,* Eine anwendungsbezogene Einführung in Märkte, Strategien und Bewertung, Springer, Berlin, Heidelberg.

Wilmott, Paul; Dewynne, Jeff N. und Howison, Sam D. (1995) *The Mathematics of Financial Derivatives:* A Student Introduction, Cambridge University Press, Cambridge.