Bewertung von Derivaten mit finiten Differenzen

Lutz Kruschwitz und Rolf Ketzler

22. Juli 2002

Inhaltsverzeichnis

1 Einführung **2**

2 Rekapitulation des Black-Scholes-Modells **2**

3 Finite Differenzen **3**

3.1 Gitter und Differenzenbildung 4

3.1.1 Erste Ableitung nach S (Delta) 4

3.1.2 Erste Ableitung nach τ (Theta) 7

3.1.3 Zweite Ableitung nach S (Gamma) 7

3.2 Explizite Methode der finiten Differenzen 8

3.2.1 Fundamentale Differenzengleichung 8

3.2.2 Anfangs-/End- und Randbedingungen 9

3.2.3 Spezialisierung für einen amerikanischen Put 10

3.2.4 Weitere Anwendungsmöglichkeiten 12

3.2.5 Zusammenhang mit dem Trinomial-Ansatz 13

4 Zusammenfassung **14**

1 Einführung

Im Zusammenhang mit der Bewertung von Optionen sind zwei Konzepte besonders populär geworden, und zwar zum einen das Epoche machende Modell von *Black und Scholes* (1973) und zum anderen das Modell von *Cox, Ross und Rubinstein* (1979), das auch unter dem Namen Binomial–Modell bekannt ist. Das *Cox–Ross–Rubinstein*–Modell stellt mathematisch nur geringe Anforderungen und eignet sich wegen dieses didaktischen Vorzugs besonders gut für einführende Lehrveranstaltungen. In Bezug auf plain vanilla Calls und Puts führen beide Modelle auf geschlossene Bewertungsgleichungen, die sich numerisch leicht auswerten lassen. Für kompliziertere Ansprüche, beispielsweise amerikanische Optionen, lassen sich einfache numerische Prozeduren auch im Rahmen des Binomial–Modells angeben.

In der Bewertungspraxis spielen geschlossene Bewertungsgleichungen aber ebenso wie numerische Verfahren auf der Grundlage des Binomial–Modells keine Ernst zu nehmende Rolle. Stark verbreitet ist dagegen die Methode der finiten Differenzen.[1] Man kann sagen, dass sie bei der Lösung konkreter Bewertungsaufgaben heute unverzichtbar geworden ist,[2] was in einem bemerkenswerten Gegensatz zur Intensität ihrer Behandlung im akademischen Unterricht steht. Mit der vorliegenden Darstellung wollen wir unsere Leser in leicht verständlicher Weise mit der (expliziten) Methode der finiten Differenzen vertraut machen.

2 Rekapitulation des Black–Scholes–Modells

Die folgenden Ausführungen orientieren sich stark am Modell von *Black und Scholes* (1973). Daher beginnen wir mit einer kurzen Rekapitulation ihres Konzepts.

Fundamentale Differentialgleichung Jedes Modell zur Bestimmung eines theoretischen Optionspreises muss zunächst eine Annahme über den Preisprozess des Basisobjekts S in der Zeit t treffen. *Black und Scholes* spezifizierten diesen stochastischen Prozess als eine geometrische *Brownsche* Bewegung,

$$dS = \mu\, S\, dt + \sigma\, S\, dz$$

[1] Gemeint sind Differenzen, die nicht verschwindend klein sind. Es wäre daher angemessen und vielleicht auch verständlicher, von endlichen Differenzen zu sprechen.

[2] *Paul Wilmott* schreibt dazu in seinem Lehrbuch: *... I would say that I use finite–difference methods about 75 % of the time. Monte Carlo simulations 20 %, and explicit formulae the rest of the time. [...] Only once have I ever seriously used a binomial method, ..., Wilmott* (2000), 868. Empfehlenswerte Darstellungen zur numerischen Bewertung von Derivaten sind *Wilmott, Dewynne und Howison* (1995b) und *Clewlow und Strickland* (1998).

mit $dz = \varepsilon \sqrt{dt}$ und $\varepsilon \sim N(0,1)$. Mit *Itôs* Lemma

$$dV = \left(\frac{\partial V}{\partial S} \mu S + \frac{\partial V}{\partial t} + 0.5 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} \sigma^2 S^2 \right) dt + \frac{\partial V}{\partial S} \sigma S \, dz$$

lässt sich der Preisprozess eines Derivats bestimmen, dessen Wert V eine Funktion des underlying assets S und der Zeit t ist. Die zentrale Idee im Modell von *Black und Scholes* besteht nun in der Konstruktion eines risikolosen Portfolios aus dem Basisobjekt und dem Derivat. Unter der Arbitragefreiheitsbedingung lässt sich auf dieser Grundlage zeigen, dass für jedes Derivat, dessen Payoff alleine von S und t abhängig ist, die so genannte *Black–Scholes*–Differentialgleichung (BS–DGL)

$$\frac{\partial V}{\partial t} + r S \frac{\partial V}{\partial S} + 0.5 \sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} - r V = 0 \tag{1}$$

gelten muss. Diese fundamentale Gleichung ist für sämtliche Derivate relevant, also nicht nur für plain vanilla Optionen, sondern auch für amerikanische sowie exotische Optionen.

End– und Randbedingungen Der Preis eines speziellen Derivats lässt sich stets dadurch gewinnen, dass man Gleichung (1) unter Berücksichtigung der für diesen Kontrakt charakteristischen End– und Randbedingungen löst. Um unsere Ausführungen möglichst anschaulich zu halten, konzentrieren wir uns im Folgenden beispielhaft auf die Bewertung eines amerikanischen Puts.

Die Endbedingung einer Option ist allgemein durch den Payoff der Option im Zeitpunkt des Vertragsendes T gegeben. Bezeichnet K den Ausübungspreis, dann lautet die charakteristische Endbedingung eines Puts

$$P_T = \max(K - S_T, 0). \tag{2}$$

Für einen amerikanischen Put muss neben dieser Bedingung zusätzlich die Randbedingung

$$P_t \geq K - S_t \quad \forall t \in [0, T) \tag{3}$$

erfüllt sein. Weitere Randbedingungen könnte man gewinnen, indem man analysiert, welchen Wert das Derivat annimmt, wenn der Preis des Basisobjekts verschwindet oder gegen unendlich geht.

3 Finite Differenzen

Zu den finiten Differenzenverfahren gehören mehrere Methoden. Vor allem sind die explizite, die implizite sowie die *Crank–Nicolson*–Methode zu nennen. Wir beschränken uns hier auf die explizite Methode der finiten Differenzen.[3] Ausgangspunkt ist die BS–DGL. Wir werden versuchen, diese durch eine Differenzengleichung zu approximieren. Dabei erweist es sich als hilfreich, die BS–DGL zunächst in der Restlaufzeit $\tau = T - t$ zu transformieren.[4] Damit ist die Richtung der Zeit geändert. Die transformierte BS–DGL lautet nun

$$\frac{\partial V}{\partial \tau} = 0.5\,\sigma^2\,S^2\,\frac{\partial^2 V}{\partial S^2} + r\,S\,\frac{\partial V}{\partial S} - r\,V. \tag{4}$$

3.1 Gitter und Differenzenbildung

Ebenso wie im Binomial–Ansatz wird auch hier eine Diskretisierung der (S, τ)–Ebene vorgenommen. Die τ–Achse wird in J gleich lange Zeitintervalle $\Delta\tau$, die S–Achse in I gleich große Kursschritte der Länge ΔS unterteilt. Sowohl die Zeitintervalle $\Delta\tau$ als auch die Kurssprünge ΔS werden der Einfachheit halber als konstant angenommen.[5] Die Diskretisierung erfordert damit das Festsetzen eines maximalen Wertes des Basisobjekts S. Üblicherweise wird als Maximalwert der zwei- bis dreifache Wert des aktuellen Basispreises gewählt. Anstelle der (S, τ)–Ebene erhält man damit ein Gitter mit den Schnittpunkten $(i\Delta S, j\Delta\tau)$. Der Wert der Option $V(S, \tau)$ ist damit durch die Approximation $V(i\Delta S, j\Delta\tau) = V_i^j$ gegeben. Mit Hilfe des Gitters bemühen wir uns nun darum, die partiellen Ableitungen der BS–DGL durch finite Differenzen zu ersetzen. Damit müssen wir uns nun ausführlicher beschäftigen.

3.1.1 Erste Ableitung nach S (Delta)

Die partielle Ableitung des Optionspreises nach dem Preis des underlying bezeichnet man als Delta. Sie ist als

$$\frac{\partial V}{\partial S} = \lim_{\Delta S \to 0}\left(\frac{V(S + \Delta S, \tau)}{\Delta S} - \frac{V(S, \tau)}{\Delta S}\right)$$

definiert. Da an die Stelle der (S, τ)–Ebene das eben beschriebene Gitter getreten ist, wird nun anstatt einer infinitesimalen Änderung lediglich eine "kleine" Veränderung ΔS betrachtet. Hierbei gibt es verschiedene Möglichkeiten.

[3] Eine Darstellung der beiden anderen Verfahren findet man bei *Wilmott* (2000), 889 ff., und *Clewlow und Strickland* (1998), 65 ff.

[4] Auf diese Transformation kann ohne weiteres verzichtet werden. Die Implementierung der Methode wird dadurch aber einfacher.

[5] Sie könnten aber auch anders festgelegt werden.

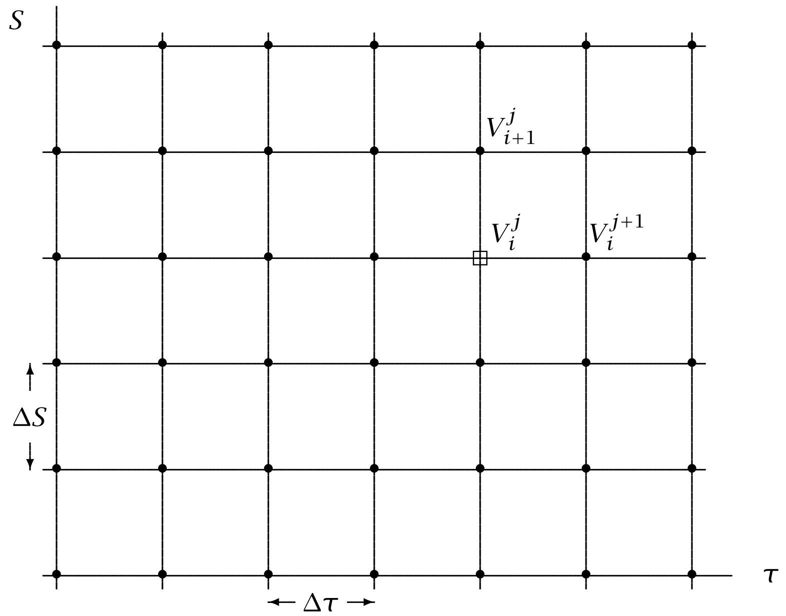

Abbildung 1: Finites Differenzen–Gitter

Vorwärtsdifferenz Besonders naheliegend ist es, die Ableitung nach dem Preis des underlying durch Rückgriff auf die Knoten des Gitters mit

$$\frac{\partial V}{\partial S} \approx \frac{V(S+\Delta S,\tau) - V(S,\tau)}{\Delta S} = \frac{V_{i+1}^{j} - V_i^j}{\Delta S} \tag{5}$$

zu approximieren. Der Differentialquotient $\frac{\partial V}{\partial S}$ am Gitterpunkt (i, j) wird mit dem Optionswert V_i^j und dem in vertikaler Richtung folgenden Wert V_{i+1}^{j} angenähert, weswegen (5) als Vorwärtsdifferenz bezeichnet wird.

Rückwärtsdifferenz Verwendet man zur Annäherung an den Differentialquotienten $\frac{\partial V}{\partial S}$ am Gitterpunkt (i, j) nicht die Gitterpunkte S und $S + \Delta S$, sondern die Gitterpunkte S und $S - \Delta S$, erhält man die so genannte Rückwärtsdifferenz

$$\frac{\partial V}{\partial S} \approx \frac{V(S,\tau) - V(S-\Delta S,\tau)}{\Delta S} = \frac{V_i^j - V_{i-1}^{j}}{\Delta S}. \tag{6}$$

Zentraldifferenz Schließlich kann die partielle Ableitung nach dem Preis des underlying auch durch die Werte der Option an den Punkten $S + \Delta S$ und $S - \Delta S$

approximiert werden. Dies führt zur so genannten Zentraldifferenz

$$\frac{\partial V}{\partial S} \approx \frac{V(S+\Delta S,\tau) - V(S-\Delta S,\tau)}{2\Delta S} = \frac{V_{i+1}^{j} - V_{i-1}^{j}}{2\Delta S}. \tag{7}$$

Approximationsfehler Abbildung 2 verdeutlicht die Unterschiede der finiten Differenzen–Approximationen grafisch. Da der Grenzwert aller drei Differenzenquotienten identisch ist, kann die partielle Ableitung mit jedem dieser Ausdrücke definiert werden. Der Augenschein legt allerdings die Vermutung nahe, dass sich die Zentraldifferenz am besten eignet. Nachdem wir verschiedene Möglichkeiten kennen gelernt haben, die partiellen Ableitungen zu approximieren, stellt sich die Frage, ob wir im Interesse eines möglichst kleinen Bewertungsfehlers mit Vorwärts–, Rückwärts– oder Zentraldifferenzen arbeiten sollten. Will man die Antwort auf diese Frage nicht dem Augenschein überlassen, so lässt sie sich auf der Grundlage einer Taylorreihenentwicklung geben. Entwickelt man die Funktion $V(S+\Delta S,\tau)$ an der Stelle (S,τ) bis zur ersten Ableitung, so erhält man

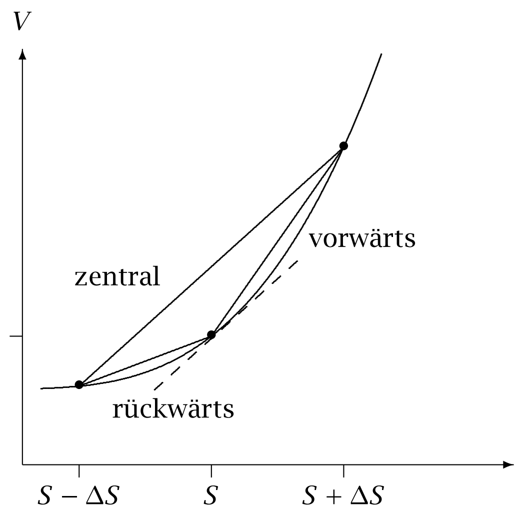

Abbildung 2: Approximation mit Vorwärts–, Rückwärts– und Zentraldifferenzen

$$\begin{aligned}
V(S+\Delta S,\tau) &= V(S,\tau) + \frac{\partial V}{\partial S}\frac{S+\Delta S - S}{1!} + O(\Delta S^2) \\
V(S+\Delta S,\tau) - V(S,t) &= \frac{\partial V}{\partial S}\Delta S + O(\Delta S^2) \\
\frac{V(S+\Delta S,\tau) - V(S,t)}{\Delta S} &= \frac{\partial V}{\partial S} + O(\Delta S) \\
\frac{\partial V}{\partial S} &= \frac{V(S+\Delta S,\tau) - V(S,t)}{\Delta S} - O(\Delta S)
\end{aligned}$$

Die Approximation mit Vorwärtsdifferenzen hat demnach einen Fehler der Ordnung $O(\Delta S)$. Die Annäherung mit Rückwärtsdifferenzen führt auf genau denselben Approximationsfehler. Betrachten wir aber Taylorreihenentwicklungen von $V(S + \Delta S, \tau)$ und $V(S - \Delta S, \tau)$ an der Stelle (S, τ) bis zur zweiten Ableitung, so erhalten wir

$$\begin{aligned} V(S + \Delta S, \tau) &= V(S, \tau) + \frac{\partial V}{\partial S} \Delta S + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} (\Delta S)^2 + O(\Delta S^3) \\ V(S - \Delta S, \tau) &= V(S, \tau) - \frac{\partial V}{\partial S} \Delta S + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} (\Delta S)^2 + O(\Delta S^3). \end{aligned}$$

Subtraktion und Umformen der beiden Gleichungen führt auf

$$\frac{\partial V}{\partial S} = \frac{V(S + \Delta S, \tau) - V(S - \Delta S, \tau)}{2\Delta S} + O(\Delta S^2).$$

Der Fehler einer Approximation mit der Zentraldifferenz ist von der Ordnung $O(\Delta S^2)$. Für kleine ΔS konvergiert der Fehler schneller gegen null als bei der Vorwärts– beziehungsweise Rückwärtsapproximation.

3.1.2 Erste Ableitung nach τ (Theta)

Die Approximation für die partielle Ableitung des Optionspreises nach der Zeit bzw. Restlaufzeit nennt man Theta. Sie wird sinngemäß in derselben Art und Weise gebildet wie die Approximation von Delta. Die Vorwärtsdifferenz lautet also

$$\frac{\partial V}{\partial \tau} \approx \frac{V(S, \tau + \Delta\tau) - V(S, \tau)}{\Delta\tau} = \frac{V_i^{j+1} - V_i^j}{\Delta\tau}.$$

Auf die Darstellung von Rückwärts– und Zentraldifferenz sei verzichtet. Die Genauigkeit der Approximation für Theta mit Vorwärts– und Rückwärtsdifferenzen ist von der Ordnung $O(\Delta\tau)$.

Die Wahl der Approximation von Theta bestimmt, welches spezielle finite Differenzenverfahren vorliegt. So führt eine Approximation in Richtung vorwärts (rückwärts) zur expliziten (impliziten) Methode der finiten Differenzen. Die Approximation mit der Vorwärtsdifferenz schafft dabei die Voraussetzung, sich entsprechend der retrograden Vorgehensweise im Binomial–Modell schrittweise durch das Gitter zu arbeiten.[6]

3.1.3 Zweite Ableitung nach S (Gamma)

Neben den beiden ersten Ableitungen der BS–DGL muss nun abschließend noch eine Approximation für die zweite Ableitung des Optionswertes nach dem Preis des underlying gefunden werden. Man spricht hier vom Gamma der Option.

[6] Verzichten wir auf die Transformation der BS–DGL mit τ, so muss Theta mit der Rückwärtsdifferenz approximiert werden.

Wiederum bestehen die drei bereits bekannten Möglichkeiten. Verwenden wir eine Vorwärts–Approximation, so können wir die zweite partielle Ableitung in der Form

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 V}{\partial S^2} &= \lim_{\Delta S \to 0} \left(\frac{\frac{\partial V}{\partial S}(S + \Delta S, \tau)}{\Delta S} - \frac{\frac{\partial V}{\partial S}(S, \tau)}{\Delta S} \right) \\ &\approx \frac{1}{\Delta S} \left(\frac{\partial V}{\partial S}(S + \Delta S, \tau) - \frac{\partial V}{\partial S}(S, \tau) \right)\end{aligned}$$

darstellen. Nähern wir die beiden ersten Ableitungen ihrerseits durch Rückwärtsdifferenzen an, so gewinnen wir

$$\frac{\partial^2 V}{\partial S^2} \approx \frac{1}{\Delta S} \left(\frac{V_{i+1}^j - V_i^j}{\Delta S} - \frac{V_i^j - V_{i-1}^j}{\Delta S} \right),$$

so dass wir insgesamt die Zentraldifferenz

$$\frac{\partial^2 V}{\partial S^2} \approx \frac{V_{i+1}^j - 2V_i^j + V_{i-1}^j}{(\Delta S)^2} \tag{8}$$

erhalten.

3.2 Explizite Methode der finiten Differenzen

3.2.1 Fundamentale Differenzengleichung

An die Stelle der mit (4) gegebenen BS–DGL tritt jetzt die Differenzengleichung

$$\begin{aligned}\frac{V_i^{j+1} - V_i^j}{\Delta \tau} =& 0.5\,\sigma^2 (i\Delta S)^2 \left(\frac{V_{i+1}^j - 2V_i^j + V_{i-1}^j}{(\Delta S)^2} \right) + r(i\Delta S) \left(\frac{V_{i+1}^j - V_{i-1}^j}{2\Delta S} \right) - rV_i^j \\ & \text{mit} \quad 1 \le i \le I - 1 \quad \text{und} \quad 0 \le j \le J\end{aligned}$$

Die explizite Differenzenmethode verwendet also für Delta und Gamma eine Zentraldifferenz und für Theta die bereits angesprochene Vorwärtsdifferenz. Der Fehler dieser Differenzengleichung gegenüber der exakten Lösung ist durch $O(\Delta S^2, \Delta\tau)$ gegeben. Die obige Differenzengleichung kann zu

$$V_i^{j+1} = V_i^j + \Delta\tau \left(0.5\sigma^2 i^2 \left(V_{i+1}^j - 2V_i^j + V_{i-1}^j \right) + 0.5ri(V_{i+1}^j - V_{i-1}^j) - rV_i^j \right) \tag{9}$$

umgeformt werden. Für die eindeutige Spezifikation des Bewertungsproblems müssen nun zusätzlich noch Rand– sowie Anfangs– bzw. Endbedingungen formuliert werden.

3.2.2 Anfangs–/End– und Randbedingungen

In Abschnitt 2 wurde die Bewertung einer Option als Lösung der BS–DGL mit den entsprechenden Rand– und Endbedingungen dargestellt. Die Lösung $V(S,\tau)$ muss also nicht nur der partiellen Differentialgleichung genügen, sondern auch die Endbedingung für $T = t$ sowie die Randbedingungen für $S = 0$ und $S \to \infty$ erfüllen. Die Randbedingungen bestimmen damit, wie sich die Lösung während der gesamten Laufzeit für spezielle Werte des underlying verhalten muss. Der Anfang der Lösung wird im Falle der BS–DGL durch die Endbedingung beschrieben.[7] Auch für die diskretisierte Version der BS–DGL (9) müssen nun End– beziehungsweise Anfangsbedingungen und Randbedingungen spezifiziert werden.

Zunächst benötigen wir Informationen über den Wert der Option im Zeitpunkt des Vertragsendes T. Durch die Transformation der BS–DGL mit der Restlaufzeit τ ist dieser Wert jetzt durch eine Anfangsbedingung gegeben. Mit der hier verwendeten Notation lautet diese

$$V_i^0 = \text{payoff}(i\Delta S).$$

Für die näherungsweise numerische Lösung der Differentialgleichung müssen wir darüber hinaus die Werte der Option an den Rändern des Gitters V_0^j und V_I^j bestimmen.

Der aufmerksame Leser wird bereits bemerkt haben, dass zur Berechnung von V_i^{j+1} die Werte der Funktion V an den Stellen V_{i+1}^j und V_{i-1}^j bekannt sein müssen. Aufgrund der Approximation der (S,τ)–Ebene durch ein endliches Gitter kann die Differenzengleichung (9) nur für $i = 1,\dots,I-1$ ausgewertet werden, da V_{I+1}^j und V_{-1}^j über die Anfangsbedingungen nicht definiert sind. Die Bestimmung der Optionswerte für $S = 0$ und $S = I\Delta S$ kann also nur mit zwei zusätzlichen Gleichungen erfolgen. Diese sind gerade durch die Randbedingungen des konkreten Bewertungsproblems gegeben. Wir wollen die Spezifikation der Anfangs– und Randbedingungen anhand zweier bekannter Beispiele veranschaulichen.

Europäischer Call: Die Anfangsbedingung eines europäischen Calls ist durch

$$V_i^0 = \max(i\Delta S - K, 0)$$

gegeben. Welche beiden Gleichungen repräsentieren nun die obere und die untere Randbedingung einer europäischen Kaufoption? Für $S = 0$ ist der Call wertlos, woraus die untere Randbedingung

$$V_0^j = 0 \quad \forall j > 0$$

[7] Die BS–DGL wird als backward equation bezeichnet. Die Vorzeichen der partiellen Ableitungen in (1) nach der Zeit t und die zweite Ableitung nach dem Preis des underlying sind identisch. Aus diesem Grund wird der Lösungsanfang durch eine Endbedingung beschrieben.

folgt. Für sehr große Werte des Basisobjekts hat die Kaufoption einen Wert in Höhe von $S - Ke^{-r(T-t)}$ oder in unserer Notation

$$V_I^j = I\Delta S - Ke^{-rj\Delta\tau} \quad \forall j > 0.$$

Amerikanischer Put: Für einen Put lautet die Anfangsbedingung

$$V_i^0 = \max(K - i\Delta S, 0). \tag{10}$$

Für sehr große Kurse des underlying ist der Put wertlos, weswegen die obere Randbedingung jetzt durch

$$V_I^j = 0 \quad \forall j > 0 \tag{11}$$

gegeben ist. Im Falle sehr kleiner Notierungen des underlying hat der amerikanische Put einen Wert in Höhe von $V = K - S$. Die untere Randbedingung lautet damit[8]

$$V_0^j = K \quad \forall j > 0. \tag{12}$$

Gamma und Randbedingungen Für weit im Geld liegende aber auch weit aus dem Geld liegende Optionen geht Gamma gegen null. Ein Blick auf (8) zeigt, dass daraus für die obere Randbedingung eines Derivats stets

$$V_I^j = 2V_{I-1}^j - V_{I-2}^j \quad \forall j > 0$$

folgt. Die untere Randbedingung lautet entsprechend

$$V_0^j = 2V_1^j - V_2^j \quad \forall j > 0.$$

Diese Randbedingungen sind immer dann anwendbar, wenn die Auszahlung des Derivats linear im underlying ist. Sie haben die angenehme Eigenschaft, dass auf die Analyse kontraktspezifischer Charakteristika verzichtet werden kann.

3.2.3 Spezialisierung für einen amerikanischen Put

Am Beispiel eines amerikanischen Puts sei der explizite finite Differenzen–Algorithmus wie folgt konkretisiert:[9]

1. Zunächst wird V_i^0 für alle $i = 0, \ldots, I$ mit der Anfangsbedingung (10) bestimmt. Der Zähler für die Zeitschritte wird auf $j = 0$ gesetzt.

[8] Im Gegensatz zum amerikanischen Put ist die untere Randbedingung des europäischen Pendants aufgrund der fehlenden vorzeitigen Ausübungsmöglichkeit durch $V = Ke^{-r(T-t)}$ gegeben.

[9] Der nachfolgend beschriebene Algorithmus kann mit Hilfe eines Visual Basic Programms implementiert werden, vgl. *Wilmott* (2000), 883.

2. Der Zähler für die Zeitschritte j wird um eins erhöht.

3. Mit Hilfe der Differenzengleichung (9) wird V_i^j für $i = 1, \ldots, I-1$ ausgerechnet. Die Randwerte V_0^j und V_I^j ergeben sich aus den Bedingungen (12) und (11).

4. Zu überprüfen bleibt noch, ob sich die vorzeitige Ausübung des Puts lohnt. Der Wert des amerikanischen Puts in j ergibt sich also aus

$$V_i^j = \max(V_i^j, K - i\Delta S),$$

wobei V_i^j im Argument der Maximumfunktion durch Schritt 3 bestimmt ist.

5. Die Schritte 2 bis 4 werden nun solange wiederholt bis die V_i^J für alle $i = 0, \ldots, I$ gefunden sind. Da der momentane Kurs des underlying in der Regel nicht mit einem der Gitterpunkte übereinstimmt, wird die Lösung für den aktuellen Preis des Basisobjekts durch Interpolation der beiden nächstliegenden Gitterpunkte berechnet.

In Tabelle 1 ist die Lösung der expliziten finiten Differenzenmethode für einen amerikanischen Put angegeben. Die betrachtete Option hat eine Restlaufzeit von einem Jahr, die Volatilität der Aktienrendite beträgt $\sigma = 0.25$, der risikolose Zins ist $r = 0.05$, und der Basispreis beläuft sich auf $K = 50$. Zur Berechnung haben wir $I = 50$ Aktienkursschritte gewählt. In den rechten drei Spalten ist der Wert

S	$\Delta\tau_1 = 0.0032$	$\Delta\tau_2 = 0.0064$	$\Delta\tau_3 = 0.0127$
36	14.000	14.000	14.000
40	10.173	10.174	10.175
44	7.141	7.143	7.152
48	4.864	4.867	4.997
52	3.222	3.225	5.664
56	2.082	2.084	36.160
60	1.317	1.318	348.667
64	0.817	0.818	2342.961
68	0.500	0.500	7518.897
72	0.302	0.302	-22.000

Tabelle 1: Explizite finite Differenzenlösung für einen amerikanischen Put

des amerikanischen Puts für Zeitintervalle unterschiedlicher Länge $\Delta\tau$ berechnet worden. Man erkennt, dass die Optionswerte in der letzten Spalte für große Werte des underlying zu unsinnigen Ergebnissen führen.

Hier haben wir es mit dem so genannten Stabilitätsproblem zu tun. Wird das Zeitintervall $\Delta\tau$ zu groß gewählt, dann führt das explizite Verfahren zu instabilen Lösungen. Um zu gewährleisten, dass das explizite Verfahren stabil ist, muss das Zeitintervall so gewählt werden, dass $\Delta\tau$ die Restriktion[10]

$$0 \leq \Delta\tau \leq \frac{1}{\sigma^2 I^2} \tag{13}$$

erfüllt. Im obigen Beispiel ist $\Delta\tau_3 = 0.0127 > (0.25 * 50)^{-2} = 0.012$. Mithin ist die Stabilitätsbedingung verletzt.

3.2.4 Weitere Anwendungsmöglichkeiten

Wir haben die explizite Methode der finiten Differenzen am Beispiel des amerikanischen Puts vorgestellt. Das Verfahren ist aber für sehr viele andere Bewertungsprobleme einsetzbar.[11] Insbesondere eignet es sich zur Bewertung exotischer Optionen.

Besonders anschaulich lässt sich das am Beispiel einer Knock-out-Option beschreiben. Knock-out-Optionen gehören neben den Knock-in-Optionen zur Klasse der Barrier-Optionen. Der Payoff einer solchen Option unterscheidet sich zunächst nicht von der einer gewöhnlichen Option, es sei denn, der Preis des Basisobjekts erreicht während der Laufzeit die Barriere oder überschreitet diese sogar. In diesem Fall ist die Option wertlos. Betrachten wir einen Up-and-out-Call. Ein solcher Call verliert immer dann seinen Wert, wenn der Preis des underlying die Barriere von unten kommend erreicht. Im Vergleich zu dem oben dargestellten Bewertungsproblem des Puts ist daher der Approximation der (S, τ)-Ebene durch das Gitter eine natürliche Grenze gesetzt. Der obere Rand des Gitters $I\Delta S$ wird zweckmäßigerweise genau in Höhe der Barriere festgelegt werden. Die obere Randbedingung lautet dann einfach

$$V_I^j = 0 \quad \forall j \geq 0.$$

Das Gitter sollte so angepasst werden, dass die Barriere auch tatsächlich auf den Gitterpunkten liegt.

Knock-in-Optionen können unter Rückgriff auf Knock-out-Optionen bewertet werden. Kombiniert man nämlich einen Up-and-out-Call mit einem Up-and-in-Call, so hat man dieselbe Position wie mit einer plain vanilla Kaufoption. Mithin ergibt sich der Wert eines Up-and-in-Calls, indem man vom Wert einer gewöhnlichen Kaufoption den Wert eines korrespondierenden Up-and-out-Calls abzieht.

[10] Eine ausführliche Darstellung der Stabilitäts- und Konvergenzeigenschaften des expliziten Verfahrens findet sich in *Wilmott* (2000), 881 f.

[11] *Hull und White* (1990) haben die Bewertung von Bonds und Bondoptionen in einem Modell mit stochastischen Zinssätzen mit Hilfe der expliziten Methode illustriert.

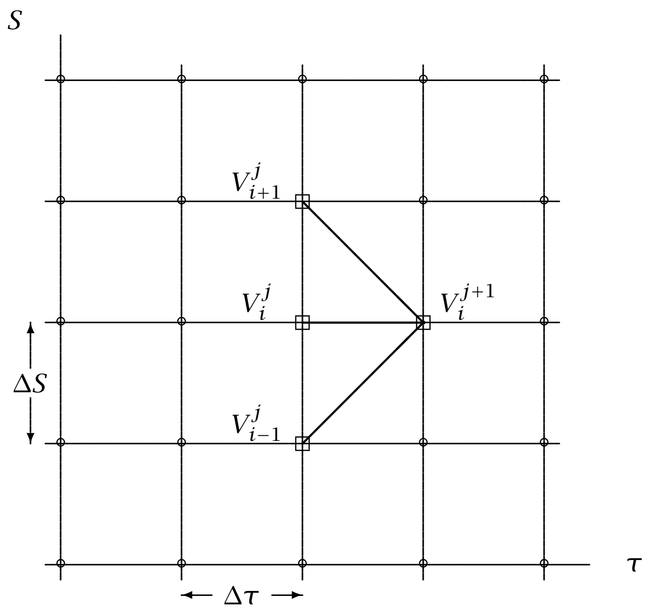

Abbildung 3: Explizite finite Differenzen–Methode und Trinomial–Modell

3.2.5 Zusammenhang mit dem Trinomial–Ansatz

Betrachten wir den expliziten Differenzen–Algorithmus abschließend nochmals aus einem etwas anderen Blickwinkel. Die Optionswerte im Zeitpunkt $j+1$ bestimmen sich explizit – daher der Name des Verfahrens – aus den Werten der Option im Zeitpunkt j.[12] Umstellen der Differenzengleichung (9) zu

$$\begin{aligned} V_i^{j+1} &= a_i^j V_{i-1}^j + b_i^j V_i^j + c_i^j V_{i+1}^j \qquad (14) \\ \text{mit} \quad a_i^j &= 0.5(\sigma^2 i^2 - ri)\Delta\tau \\ b_i^j &= 1 - (\sigma^2 i^2 + r)\Delta\tau \\ c_i^j &= 0.5(\sigma^2 i^2 + ri)\Delta\tau \end{aligned}$$

verdeutlicht, dass sich V_i^{j+1} aus drei verschiedenen Werten der Option im Zeitpunkt j ergibt. Die explizite Methode der finiten Differenzen ist damit einem Trinomial–Ansatz äquivalent, wie in Abbildung (3) veranschaulicht ist. Ausgehend von dem Gitterpunkt $(i, j+1)$ kann das underlying innerhalb des nächsten Zeitintervalls $\Delta\tau$ entweder um $i\Delta S$ auf $(i+1, j)$ steigen, um $i\Delta S$ auf $(i-1, j)$ fallen oder konstant bleiben (i, j). Damit ist ein diskreter, trinomialer random walk beschrieben.

[12] Man beachte, dass die Richtung der Zeit geändert ist.

4 Zusammenfassung

Die Methode der expliziten finiten Differenzen ist neben dem Binomial-Modell ein weiteres Verfahren zur numerischen Bewertung von Derivaten. In seiner formalen Struktur entspricht es dem Ansatz eines Trinomial-Baums. Im Unterschied zum Binomial-Modell ist die Lage des Gitters in diesem Verfahren aber allein von den gewählten Diskretisierungsschritten und nicht von den Parametern des Optionskontraktes abhängig.[13] Das explizite Verfahren hat den Vorteil, dass der Algorithmus zur Bestimmung eines Optionspreises relativ einfach implementiert werden kann, beispielsweise als Visual Basic Application. Besonders gut eignet sich das Verfahren zur Bewertung von amerikanischen Optionen sowie Barrier-Optionen.

Bei der Anwendung des expliziten Verfahrens muss allerdings beachtet werden, dass die Stabilitätsrestriktion eingehalten wird. Aus diesem Grund kann das explizite finite Differenzenverfahren unter Umständen mehr Zeit für die Berechnung von Optionspreisen in Anspruch nehmen als andere Verfahren. Wenn das Verfahren instabil sein sollte, so ist das in der Regel an Hand absurder Resultate gut zu erkennen. Neben dem expliziten Verfahren existiert eine Reihe von weiteren finiten Differenzenmethoden, die günstigere Stabilitätseigenschaften besitzen.

Literatur

Black, Fischer und Scholes, Myron S. (1973) “The pricing of options and corporate liabilities”, *Journal of Political Economy*, 81, 637–654.

Brennan, Michael J. und Schwartz, Eduardo S. (1978) “Finite difference methods and jump processes arising in the pricing of contingent claims: a synthesis”, *Journal of Financial and Quantitative Analysis*, 13, 461–474.

Clewlow, Les und Strickland, Chris (1998) *Implementing Derivatives Models*, John Wiley & Sons, New York.

Cox, John C.; Ross, Stephen A. und Rubinstein, Mark (1979) “Option pricing: a simplified approach”, *Journal of Financial Economics*, 7, 229–263.

Hull, John C. und White, Alan (1990) “Valuing derivative securities using the explicit finite difference model”, *Journal of Financial and Quantitative Analysis*, 25, 87–99.

Seydel, Rüdiger (2000) *Einführung in die numerische Berechnung von Finanz-Derivaten*, Springer, Berlin.

[13] So führt eine Änderung der Volatilität lediglich zu einer Veränderung der Koeffizienten der Differenzengleichung, während im Binomial-Modell ein unmittelbarer Einfluss auf die up- und down-Faktoren und damit auf die Struktur des Baumes gegeben ist.

Wilkens, Sascha und Röder, Klaus (2001) “Bewertung exotischer Optionen mit Hilfe von Monte–Carlo–Simulation”, *FinanzBetrieb*, 3, 118–124.

Wilmott, Paul (2000) *Paul Wilmott on Quantitative Finance*, Band 2, John Wiley & Sons, Chichester.

— (2001) *Paul Wilmott Introduces Quantitative Finance*, John Wiley & Sons, Chichester.

Wilmott, Paul; Dewynne, Jeff und Howison, Sam (1995a) *The Mathematics of Financial Derivatives,* A Student Introduction, Cambridge University Press, Cambridge.

— (1995b) *Option Pricing,* Mathematical Models and Computation, Oxford Financial Press, Oxford.