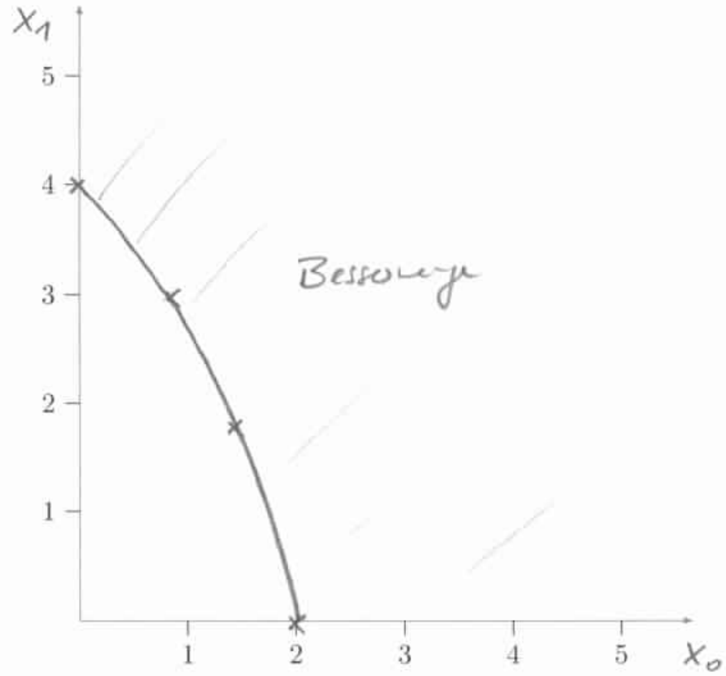
Aufgabe 1 (9 Punkte)

Betrachten Sie Bündel aus jeweils zwei Gütern $X = (X_0, X_1)$, wobei einschränkend $X_0, X_1 \geq 0$ gilt, und die Nutzenfunktion

$$U(X) = X_1 + X_0^2$$

a) Skizzieren Sie im folgenden Koordinatensystem die Bessermenge für ein Nutzenniveau von $U(X) = 4$ und beschriften Sie die Achsen *(3 Punkte)*.



Achsenbeschriftung	0,5P
Funktionsverlauf	1,5P
Bessermenge	1P
	3P

b) Überprüfen Sie mathematisch, ob die folgenden Nutzenfunktionen $U^*(X)$ im Wertebereich $X_0, X_1 > 0$ die gleichen Präferenzen repräsentieren wie $U(X) = X_1 + X_0^2$ und erläutern Sie Ihr Ergebnis in einem Satz *(jeweils 2 Punkte)*.

i) $U^*(X) = \frac{e^{X_1}}{e^{-X_0^2}}$ $= e^{X_1} e^{X_0^2} = e^{X_1 + X_0^2} = e^{u(x)}$

0,5P 0,5P

E^x, bzw $\ln(x)$ sind monotone Transformationen, daher repräsentieren $U^*(X)$, $U(x)$ die gleichen Präferenzen 1P

ii) $U^*(X) = X_1^2 + 2 \cdot X_0^2 \cdot X_1 + X_0^4$ $= (X_1 + X_0^2)^2 = (U(x))^2$

1P

$(\ )^2$, bzw $\sqrt{x}$ sind monotone Transformationen, daher repräsentieren $U^*(x)$ und $U(x)$ die gleichen Präferenzen. 1P

iii) $U^*(X) = -\frac{1}{-X_1 - X_0^2}$ $= \frac{1}{X_1 + X_0^2} = \frac{1}{U(x)}$ 1P

$\frac{1}{x}$ keine monotone Transformation, daher keine Repräsentation der gleichen Präferenz von $U(x)$, $U^*(x)$

Aufgabe 2 (9 Punkte)

Bestimmen Sie für die folgenden Erwartungsnutzenfunktionen die absolute und die relative Risikoaversion. Ermitteln Sie weiterhin, welches Verhalten die Erwartungsnutzenfunktionen jeweils in einem einfachen Portfolioproblem implizieren, wenn sich das Vermögen erhöht. Geben Sie Ihr Ergebnis in jeweils einem Satz wieder *(jeweils 3 Punkte)*.

a) $u(x) = ln(x^2)$ für $x \geq 0$

$u'(x) = \frac{1}{x^2} \cdot 2x = \frac{2}{x} = 2x^{-1}$ 0,5P

$u''(x) = -2x^{-2}$ 0,5P

$ARA = -\frac{2x^{-2}}{2x^{-1}} = x^{-1}$ 0,5P $ARA' = -x^{-2} < 0$

$RRA = 1$ 0,5P $RRA' = 0$

$x\uparrow \longrightarrow$ Menge risk. Asset $\uparrow$ $\longrightarrow$ Anteil $\longrightarrow$

1P (nur Ableitungen 0,5P)

b) $u(x) = -e^{-x^2}$ für $x \geq 0$

$u'(x) = 2x e^{-x^2}$ 0,5P

$u''(x) = -4x^2 e^{-x^2} + 2e^{-x^2}$ 0,5P

$ARA = -\frac{-4x^2 e^{-x^2} + 2e^{-x^2}}{2x e^{-x^2}} = \frac{+4x^2 - 2}{2x} = 2x - x^{-1}$ 0,5P $ARA' = 2 + x^{-2} > 0$

$RRA = 2x^2 - 1$ 0,5P $RRA' = 4x > 0$

$x\uparrow \longrightarrow$ Menge $\downarrow$ $\longrightarrow$ Anteil $\downarrow$ 1P

(wenn Abl. korrekt 0,5P)

c) $u(x) = -\sqrt{e^{-3x}}$ für $x \geq 0$

$$u(x) = -e^{-\frac{3}{2}x}$$

$$u'(x) = \frac{3}{2}e^{-\frac{3}{2}x} \qquad 0,5P$$

$$u''(x) = -\frac{9}{4}e^{-\frac{3}{2}x} \qquad 0,5P$$

$$ARA = -\frac{-\frac{9}{4}}{\frac{3}{2}} = \frac{3}{2} \qquad 0,5P \qquad ARA' = 0$$

$$RRA = \frac{3}{2}x \qquad 0,5P \qquad RRA' = \frac{3}{2} > 0$$

$x \uparrow \longrightarrow$ Menge risk. Asset $\rightarrow$ $\longrightarrow$ Anteil risk. Asset $\downarrow$

1P nur Abl. 0,5P

Aufgabe 3 (12 Punkte)

Eine zufällige Zahlung x ist auf dem Intervall $[5, 10]$ gleichverteilt. Die Erwartungsnutzenfunktion des Empfängers beträgt $u(x) = -x^{-2}$.

a) Ermitteln Sie den Erwartungswert der Zahlung E(x), den Erwartungswert der quadrierten Zahlung $E(x^2)$ und den Nutzen des Empfängers E(u(x)) *(4,5 Punkte)*.
Hinweis: Wenn Sie einen Wert nicht ermitteln können, so rechnen Sie mit einem beliebigen selbstgewählten Betrag weiter, bspw. mit einer Dichtefunktion der Zahlung von $f(x) = \frac{1}{5}$.

$$E(x) = \int_5^{10} \frac{1}{5} x \, dx = \frac{1}{10} \left[x^2\right]_5^{10} = \frac{100 - 25}{10} = 7{,}5$$

$$E(x^2) = \int_5^{10} \frac{1}{5} x^2 \, dx = \frac{1}{15} \left[x^3\right]_5^{10} = \frac{1000 - 125}{15} = 58\frac{1}{3}$$

$$E(u(x)) = \int_5^{10} \frac{1}{5}(-x^{-2}) \, dx = \frac{1}{5} \left[x^{-1}\right]_5^{10} = \frac{1}{5}\left(\frac{1}{10} - \frac{1}{5}\right) = -\frac{1}{50}$$

Dichtefkt $f(x) = \frac{1}{5}$ 0,5P

Formel Erwartungswert 1P (auch implizit $\hat{=}$ korrekt angewendet)

konkrete Werte: Integral korrekt notiert je 0,5P $\longrightarrow$ 1,5P

Ergebnis korrekt je 0,5P $\longrightarrow$ 1,5P

Max gesamt 4,5P

b) Geben Sie die Ausgangsformel zur exakten Ermittlung der Markowitz–Risikoprämie π an und berechnen Sie diese *(4 Punkte)*.

$$U(E(x)-\pi) = E(U(x)) \qquad 2P$$

$$-\frac{1}{(7{,}5-\pi)^2} = -\frac{1}{50} \qquad 1P$$

$$7{,}5-\pi = \pm\sqrt{50}$$

$$\pi = 7{,}5 \pm \sqrt{50} \qquad 1P$$

hier: $\pi \approx 0{,}4289$

$$\overline{4P}$$

$$\boxed{\begin{array}{lll} \text{Negativ:} & \text{Rechenfehler} & -1P \\ & \text{VZ-Fehler} & -0{,}5P \\ & \text{Rundungsfehler} & -0{,}5P \end{array}}$$

bis maximal zur Aufhebung der positiven Bepunktung

c) Berechnen Sie die Markowitz–Risikoprämie π nach der Approximationsformel[2] *(3,5 Punkte)*.

$$\pi \approx \frac{1}{2}\, Var(x) \left(-\frac{u''(E(x))}{u'(E(x))}\right) \qquad 0P \quad (s.u.)$$

$$-\frac{u''(x)}{u'(x)} = -\frac{-6x^{-4}}{2x^{-3}} = 3x^{-1} \qquad 1P$$

$$Var(x) = \underbrace{E(x^2)-(E(x))^2}_{1P} = 58\tfrac{1}{3} - 7{,}5^2 \approx \underbrace{2{,}0833}_{0{,}5P} \qquad 1{,}5P$$

$$\pi \approx \frac{1}{2} \cdot 2{,}0833 \cdot \underbrace{\frac{3}{7{,}5}}_{0{,}5P} \approx \underbrace{0{,}4166}_{0{,}5P} \qquad 1P$$

$$\overline{3{,}5P}$$

[2]Diese lautet $\pi \approx \frac{1}{2} \cdot Var(x) \cdot \left(-\frac{u''(E(x))}{u'(E(x))}\right)$.