Fach:	Banken und Finanzierung
Prüfer:	Prof. Dr. Dr. A. Löffler
Veranstaltung:	Entscheidungstheorie SS07
CP anrechnen lassen für: ggfls. streichen und dann bitte Veranstaltung und Prüfungsnummer angeben	Entscheidungstheorie SS07

Name	
Vorname	
Matrikelnummer Wenn nicht WISO bitte Studiengang	
Punkte	
Note	

Beachten Sie bitte folgende Hinweise:

1. Schreiben Sie bitte Ihre Lösung in die vorgegebenen Leerzeilen des Aufgabenblattes sowie, sollte der Platz nicht ausreichen, auf die leeren Rückseiten.
2. Rechnen Sie auf mindestens fünf genaue Ziffern (das sind nicht notwendigerweise fünf Nachkommastellen) im Endergebnis.[1]
3. Eine Aufgabe wird nur dann gewertet, wenn der Lösungsweg klar zu erkennen ist.
4. Klausuren, die unleserlich sind, werden nicht bewertet. Das gleiche gilt, wenn Sie mit Bleistift schreiben.
5. Nur nicht–programmierbare Taschenrechner sowie ein Wörterbuch ohne handschriftliche Einträge sind zugelassen.
6. Diese Klausur enthält ohne Deckblatt **10** Seiten (davon 2 Schmierblätter am Ende).

Und nun **viel Erfolg** …

[1] Ist das exakte Ergebnis beispielsweise 113.941,7234, dann bedeutet eine Genauigkeit auf fünf Ziffern 113.940.

Aufgabe 1 (6 Punkte) Betrachten Sie Güterbündel mit jeweils zwei Gütern $X = (X_0, X_1)$ (mit $X_0, X_1 > 0$) und folgende Nutzenfunktion

$$U(X) = X_0 + X_1.$$

Prüfen Sie, ob die folgenden Nutzenfunktionen ebenfalls die gleiche Präferenz repräsentieren:

(a) $U^*(X) = X_0^2 + X_1^2$.

Lösung: NEIN.

Gegenbeispiel:

$$X = (\frac{2}{3}, \frac{2}{3}); Y = (1, \frac{1}{4})$$
$$U(X) = \frac{2}{3} + \frac{2}{3} = \frac{4}{3} > U(Y) = 1 + \frac{1}{4} = 1\frac{1}{4}$$
$$U^*(X) = (\frac{2}{3})^2 + (\frac{2}{3})^2 = \frac{8}{9} < U^*(Y) = 1^2 + (\frac{1}{4})^2 = 1\frac{1}{16}$$

(b) $U^*(X) = -\frac{1}{X_0} - \frac{1}{X_1}$.

Lösung: NEIN.

Gegenbeispiel:

$$X = (1, 4); Y = (2, 2)$$
$$U(X) = 1 + 4 = 5 > U(Y) = 2 + 2 = 4$$
$$U^*(X) = -\frac{1}{1} - \frac{1}{4} = -1\frac{1}{4} < U^*(Y) = -\frac{1}{2} - \frac{1}{2} = -1$$

Aufgabe 2 (8 Punkte) Betrachten Sie Güterbündel mit jeweils zwei Gütern $X = (X_0, X_1)$ und folgende Präferenzrelation für dieses Güterbündel

$$X \succeq Y :\iff (X_0 \geq Y_0 \text{ oder } X_1 \geq Y_0) \text{ und } (X_0 \geq Y_1 \text{ oder } X_1 \geq Y_1) \tag{1}$$

Prüfen Sie die Gültigkeit der Vergleichbarkeit und Transitivität und zeichnen Sie die Bessermenge.

Lösung: Vergleichbarkeit: Ja. Transitivität: Ja.

Aus (1) folgt:

$$\begin{aligned}
&X \succeq Y :\iff (\max(X) \geq Y_0) \text{ und } (\max(X) \geq Y_1)\\
&bzw.\\
&X \succeq Y :\iff \max(X) \geq \max(Y)
\end{aligned}$$

Es existiert die Nutzenfunktion $U(X) = \max(X)$. Daraus folgt, dass die Präferenzrelation die drei Axiome erfüllen muss.

Aufgabe 3 (8 Punkte) Betrachten Sie zwei Wertpapiere mit identischen Preisen, welche folgende (unsichere) Zahlungen generieren:

$$X = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}, \qquad Y = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Die Wahrscheinlichkeiten der Zustände seien $(\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4})$. Welches Wertpapier wird ein Investor wählen, der eine monotone und konkave Nutzenfunktion besitzt? Warum? (Nutzen Sie dazu, falls notwendig, das folgende Gitter.)

Lösung: Der Investor wird Y wählen, denn $Y_{SSD} \succeq X$ liegt vor.

wir betrachten einen Punkt t^* (als Obergrenze des Integrals). Wir haben nun fünf Fälle zu unterscheiden.

Beginnen wir mit dem **ersten Fall** $t^* \leq 1$

$$\int_0^{t^*} F_Y(t)dt - \int_0^{t^*} F_X(t)dt = 0 - 0 = 0 \quad \Rightarrow \quad \int_0^{t^*} F_Y(t)dt = \int_0^{t^*} F_X(t)dt$$

Für den **zweiten Fall** $1 < t^* \leq 2$ haben wir

$$\begin{aligned} \int_0^{t^*} F_Y(t)dt - \int_0^{t^*} F_X(t)dt &= (0 + \frac{1}{4}(t^* - 1)) - (0 + \frac{1}{2}(t^* - 1)) \\ &= -\frac{1}{4}(t^* - 1) < 0 \quad \Rightarrow \quad \int_0^{t^*} F_Y(t)dt < \int_0^{t^*} F_X(t)dt \end{aligned}$$

Für den **dritten Fall** $2 < t^* \leq 3$ haben wir

$$\begin{aligned} \int_0^{t^*} F_Y(t)dt - \int_0^{t^*} F_X(t)dt &= -\frac{1}{4} + (\frac{3}{4}(t^* - 2) - \frac{3}{4}(t^* - 2)) \\ &= -\frac{1}{4} < 0 \quad \Rightarrow \quad \int_0^{t^*} F_Y(t)dt < \int_0^{t^*} F_X(t)dt \end{aligned}$$

Für den **vierten Fall** $3 < t^* \leq 4$ haben wir

$$\begin{aligned} \int_0^{t^*} F_Y(t)dt - \int_0^{t^*} F_X(t)dt &= -\frac{1}{4} + ((t^* - 3) - \frac{3}{4}(t^* - 3)) \\ &= \frac{1}{4}(t^* - 4) \leq 0 \quad \Rightarrow \quad \int_0^{t^*} F_Y(t)dt \leq \int_0^{t^*} F_X(t)dt \end{aligned}$$

Für den **letzten Fall** $t^* > 4$ haben wir

$$\begin{aligned}\int_0^{t^*} F_Y(t)dt - \int_0^{t^*} F_X(t)dt &= 0 + ((t^* - 4) - (t^* - 4)) \\ &= 0 \quad \Rightarrow \quad \int_0^{t^*} F_Y(t)dt = \int_0^{t^*} F_X(t)dt\end{aligned}$$

Zusammengefasst:

$$\forall t^* \qquad \int_0^{t^*} F_Y(t)dt \leq \int_0^{t^*} F_X(t)dt \quad \Rightarrow Y_{SSD} \succeq X$$

Aufgabe 4 (8 Punkte) **(a)** Nennen Sie eine Erwartungsnutzenfunktion mit konstanter absoluter Risikoaversion. Beweisen Sie, dass diese Funktion tatsächlich vom CARA–Typ ist.

Lösung: $u(x) = -e^{-ax} \quad \text{für} \quad a > 0$

$$\begin{aligned}u'(x) &= -e^{-ax} \cdot (-a) = a \cdot e^{-ax} \\ u''(x) &= ae^{-ax} \cdot (-a) = -a^2 \cdot e^{-ax} \\ ARA &= -\frac{u''(x)}{u'(x)} = -\frac{-a^2 \cdot e^{-ax}}{a \cdot e^{-ax}} = a = \text{const.}\end{aligned}$$

(b) Nennen Sie eine Erwartungsnutzenfunktion mit konstanter relativer Risikoaversion. Beweisen Sie, dass diese Funktion tatsächlich vom CRRA–Typ ist.

Lösung: $u(x) = \ln(x) \quad x \neq 0$

$$\begin{aligned}u'(x) &= x^{-1} \\ u''(x) &= -1 \cdot x^{-2} \\ RRA &= -\frac{u''(x)}{u'(x)} \cdot x = -\frac{-1 \cdot x^{-2}}{x^{-1}} \cdot x = 1 = \text{const.}\end{aligned}$$

Aufgabe 5 (30 Punkte) Sie haben 10.000 € geerbt und möchten das Geld auf dem Kapitalmarkt für ein Jahr anlegen. Der Kapitalmarkt ist perfekt. Folgende Anlageformen stehen zur Verfügung:

Dax Index Sparbuch Das „Dax Index Sparbuch“ bietet einen Garantiezins von $1,5\%$ pro Jahr. Steigt der Dax-Index von einem jährlichen Stichtag zum nächsten, so wird der Anleger zusätzlich zu $\frac{2}{3}$ an der prozentualen Kurssteigerung (Rendite) beteiligt. Ist der Kurs gefallen, so bekommt der Anleger nur den Garantiezins. Gehen Sie vereinfachend davon aus, dass die Dax-Rendite in einem Jahr auf dem Interval $[-50\%, 50\%]$ gleichverteilt ist.

Normales Sparbuch Das Sparbuch bietet eine feste Verzinsung in Höhe von $2,5\%$ pro Jahr.

Fall I: Die zwei mögliche Anlageformen schließen sich aus. Sie haben eine Erwartungsnutzenfunktion der Form

$$U(X) = \sqrt{X},$$

wobei X die **Rendite** bezeichnet.

I.1 Welche Anlageform wählen Sie ? Warum? (8 Punkte)

Lösung:

Nutzen des normalen Sparbuches :

$$U(2,5\%) = \sqrt{2,5\%} = 0,1581$$

Erwartungsnutzen des Dax Index Sparbuches :

$$\text{Dichte:} \quad f(X) = \frac{1}{50\% - (-50\%)} = 1$$

$$\begin{aligned} E[U(X)] &= \int_{-0,5}^{0} \sqrt{0,015} \cdot 1 \cdot dt + \int_{0}^{0,5} \sqrt{0,015 + \frac{2}{3}t} \cdot 1 \cdot dt \\ &= \Big[0,12247t\Big]_{-0,5}^{0} + \Big[(0,015 + \frac{2}{3}t)^{\frac{3}{2}}\Big]_{0}^{0,5} \\ &= 0,0612 + 0,203748 = 0,26499 \end{aligned}$$

Man wählt die Anlageform Dax Index Sparbuch.

I.2 Was für eine Verzinsung muss das normale Sparbuch bieten, damit Sie zwischen den beiden Anlageformen indifferent sind? (4 Punkte)

Lösung:

$$U(X) = \sqrt{X} = 0,26499 \quad \Rightarrow \quad X = 0,07022 = 7,022\%$$

Fall II: Die zwei mögliche Anlageformen schließen sich nicht aus. Sie haben eine Nutzenfunktion der Form

$$U(X) = E[X] - \frac{1}{2}Var[X],$$

wobei X jetzt das **Vermögen** bezeichnet.

II.1 Berechnen Sie den Erwartungswert und die Varianz der Rendite des „Dax Index Sparbuchs“. (6 Punkte)

Lösung:

$$\text{Dichte:} \quad f(X) = \frac{1}{50\% - (-50\%)} = 1$$

$$\begin{aligned}
E[r_{\text{Daxsparbuch}}] &= 0,015 + \int_0^{0,5} \frac{2}{3}t \cdot 1 \cdot dt \\
&= 0,015 + 0,0833 \\
&= 0,0983 \\
Var[r_{\text{Daxsparbuch}}] &= \int_{-0,5}^{0} 0,015^2 \cdot 1 \cdot dt + \int_0^{0,5} (0,015 + \frac{2}{3}t)^2 \cdot 1 \cdot dt - 0,0983^2 \\
&= [0,000225t]_{-0,5}^{0} + \int_0^{0,5} (0,015^2 + 0,02 \cdot t + (\frac{2}{3}t)^2) \cdot 1 \cdot dt - 0,0983^2 \\
&= [0,000225t]_{-0,5}^{0} + \int_0^{0,5} 0,015^2 dt + \int_0^{0,5} 0,02t dt + \int_0^{0,5} (\frac{2}{3}t)^2 dt - 0,0983^2 \\
&= [0,000225t]_{-0,5}^{0} + [0,000225t]_0^{0,5} + \left[0,01t^2\right]_0^{0,5} + \left[\frac{4}{27}t^3\right]_0^{0,5} - 0,0983^2 \\
&= 0,000225 + 0,0025 + 0,0185185 - 0,00966 \\
&= 0,0115835
\end{aligned}$$

II.2 Angenommen, die Rendite des „Dax Index Sparbuchs“ hat einen Erwartungswert von 20% und eine Varianz von $0,02$, Formulieren Sie Ihr Entscheidungsproblem. (6 Punkte)

Lösung (Variante A): Nutzen Funktion: $U(X) = E[X] - \frac{1}{2}Var[X]$.

X bezeichnet jetzt das Vermögen. Y^1 das normale Sparbuch und Y^2 das Daxsparbuch. Für jeden angelegten Euro zahlt Y^1 nach einem Jahr $(1 + 0,025) \cdot 1 = 1,025$ Euro aus, die entsprechende erwartete Auszahlung von Y^2 beträgt $E[Y^2] = (1 + E[r_{\text{Daxsparbuch}}]) \cdot 1 = 1,2$. Die Varianz von Y^2 beträgt dann $Var[Y^2] = Var[(1 + r_{\text{Daxsparbuch}}) \cdot 1] = Var[r_{\text{Daxsparbuch}}]] = 0,02$

Sei x der Betrag den Sie in das Daxsparbuch investieren, dann ist $(10000 - x)$ der Betrag, den Sie in das normale Sparbuch investieren. Denn es gibt hier kein Sättigungsproblem.

Portfolio: $X = (10000 - x) \cdot Y^1 + x \cdot Y^2$

$$\begin{aligned}
E[X] &= E[(10000 - x) \cdot Y^1 + x \cdot Y^2] \\
&= (10000 - x) \cdot 1,025 + 1,2x \\
&= 10250 + 0,175x \\
Var[X] &= Var[(10000 - x) \cdot Y^1 + x \cdot Y^2] \\
&= x^2 Var[r_{\text{Daxsparbuch}}] \\
&= 0,02x^2
\end{aligned}$$

Damit ist das Entscheidungsproblem

$$\max U(X) = 10250 + 0,175x - 0,01x^2$$

Oder Lösung (Variante B):

Sei x_1 der Betrag, den Sie in das normale Sparbuch und x_2 der Betrag, den Sie in das Daxsparbuch investieren.

Portfolio: $X = x_1 \cdot Y^1 + x_2 \cdot Y^2$

$$\begin{aligned} E[X] &= E[x_1 \cdot Y^1 + x_2 \cdot Y^2] \\ &= 1,025x_1 + 1,2x_2 \\ Var[X] &= Var[x_1 \cdot Y^1 + x_2 \cdot Y^2] \\ &= x^2 Var[r_{\text{Daxsparbuch}}] \\ &= 0,02x^2 \end{aligned}$$

Damit ist das Entscheidungsproblem

$$\begin{aligned} \max U(X) &= 1,025x_1 + 1,2x_2 - 0,01x_2^2 \\ NB: \quad & x_1 + x_2 = 10000 \quad \text{(kein Sättigungsproblem)} \end{aligned}$$

II.3 Ermitteln Sie die optimale Anlagestrategie (Übernehmen Sie die Werte von Aufgabe **II.2**). (6 Punkte)

Lösung (Variante A):

$$\begin{aligned} \max U(X) &= 10250 + 0,175x - 0,01x^2 \\ \frac{\partial U(X)}{\partial x} &= 0,175 - 0,02x = 0 \\ x &= 8,75 \quad \text{(Investition in Daxsparbuch)} \\ 10000 - x &= 9991,25 \quad \text{(Investition in normales Sparbuch)} \end{aligned}$$

Schmierblatt Nr. 1

Schmierblatt Nr. 2