Fach:	Banken und Finanzierung
Prüfer:	Prof. Dr. Dr. A. Löffler
Veranstaltung:	Entscheidungstheorie (SBWL) SS08
CP anrechnen lassen für: ggfls. streichen und dann bitte Veranstaltung und Prüfungsnummer angeben	Entscheidungstheorie (SBWL) SS08

Name	
Vorname	
Matrikelnummer Wenn nicht WISO bitte Studiengang	
Punkte	
Note	

Beachten Sie bitte folgende Hinweise:

1. Schreiben Sie bitte Ihre Lösung in die vorgegebenen Leerzeilen des Aufgabenblattes sowie, sollte der Platz nicht ausreichen, auf die leeren Rückseiten.
2. Rechnen Sie auf mindestens fünf genaue Ziffern (das sind nicht notwendigerweise fünf Nachkommastellen) im Endergebnis.[1]
3. Eine Aufgabe wird nur dann gewertet, wenn der Lösungsweg klar zu erkennen ist.
4. Klausuren, die unleserlich sind, werden nicht bewertet. Das gleiche gilt, wenn Sie mit Bleistift schreiben.
5. Nur nicht–programmierbare Taschenrechner sowie ein Wörterbuch ohne handschriftliche Einträge sind zugelassen.
6. Diese Klausur enthält ohne Deckblatt **8** Seiten (davon 2 Schmierblätter am Ende).

Und nun **viel Erfolg** …

[1] Ist das exakte Ergebnis beispielsweise 113.941,7234, dann bedeutet eine Genauigkeit auf fünf Ziffern 113.940.

Aufgabe 1 (14 Punkte)

Betrachten Sie die Güterbündel X und Y, die jeweils zwei Güter (Äpfel und Birnen) enthalten.

$$X = \begin{pmatrix} X_0 \\ X_1 \end{pmatrix}, \qquad Y = \begin{pmatrix} Y_0 \\ Y_1 \end{pmatrix}.$$

X_0 und Y_0 geben die Anzahl der Äpfel und X_1 und Y_1 die Anzahl der Birnen in den entsprechenden Bündeln an. Nehmen Sie an, dass Ihre Präferenzrelation der lexikographischen Ordnung entspricht (Äpfel sind grundsätzlich besser als Birnen. Und es gilt für beide Güter: je mehr desto besser).

a1) Unterstellen Sie, dass die Gütermengen beliebige reelle Zahlen sind. Formulieren Sie Ihre Präferenzrelation formal. (3 Punkte)

Lösung:

$$X \succeq Y :\Longleftrightarrow\; X_0 > Y_0 \text{ oder } (X_0 = Y_0 \text{ und } X_1 \geq Y_1).$$

a2) Prüfen Sie, ob die Präferenzrelation die Axiome der Vergleichbarkeit, Transitivität und Stetigkeit erfüllt. Sie dürfen dabei keine graphische Lösung heranziehen. (8 Punkte)

Für den Fall, dass Sie die Aufgabe a1) und b) nicht lösen können, betrachten Sie folgende Präferenzrelation

$$X \succeq Y :\Longleftrightarrow\; (X_0 \geq Y_0 \textit{ oder } X_1 \geq Y_1).$$

Prüfen Sie die Gültigkeit der Vergleichbarkeit und Transitivität und zeichnen Sie die Bessermenge.

Lösung: Siehe Skript (neue Version) Seite 20-21 bzw. Übung AS2/A4

b) Bisher sind die Gütermengen beliebige reelle Zahlen gewesen. Jetzt sollen sie ausschließlich natürliche Zahlen sein: $X_0, X_1, Y_0, Y_1 \in \mathbf{N}$.

Geben Sie jetzt eine Nutzenfunktion für diese Präferenzrelation an. (3 Punkte)

Lösung:

$$X \succeq Y \;\Longleftrightarrow\; X_0 + \frac{X_1}{1 + X_1} \geq Y_0 + \frac{Y_1}{1 + Y_1}.$$

Aufgabe 2 (16 Punkte)

Betrachten Sie zwei Wertpapiere mit identischen Preisen, welche folgende (unsichere) Zahlungen generieren:

$$X = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \qquad Y = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Das Wertpapier X zahlt also im ersten Zustand 1, im zweiten Zustand 2, im dritten Zustand 3 und das Wertpapier Y im ersten Zustand 2, im zweiten 4.... Die Wahrscheinlichkeit für das Eintreten des ersten Zustandes sei $\frac{1}{2}$.

a) Erläutern Sie kurz die Bedeutung der Begriffe *First-order Stochastic Dominance* und *Second-order Stochastic Dominance*. (3 Punkte)

Lösung:

Skript S.49 Satz.10 und S.50 Satz.11

b) Ermitteln Sie das Intervall für die Wahrscheinlichkeit des zweiten Zustandes, bei dem $Y_{FSD} \succeq X$ gilt. (6 Punkte)

Lösung:

$$X = \begin{array}{cc} & \text{Wkt.} \\ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} & \begin{array}{c} \frac{1}{2} \\ q \\ \frac{1}{2} - q \end{array} \end{array} \qquad Y = \begin{array}{cc} & \text{Wkt.} \\ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}, & \begin{array}{c} \frac{1}{2} - q \\ \frac{1}{2} \\ q \end{array} \end{array}$$

Damit $Y_{FSD} \succeq X$ gilt, muss folgende Ungleichung gelten:

$$\forall t \qquad F_Y(t) \leq F_X(t)$$

$$F_X(1) = \frac{1}{2}, \quad F_Y(1) = \frac{1}{2} - q, \quad \frac{1}{2} - q \leq \frac{1}{2} \quad \Rightarrow \quad q \geq 0$$

$$F_X(2) = \frac{1}{2} + q, \quad F_Y(2) = \frac{1}{2} - q + \frac{1}{2}, \quad 1 - q \leq \frac{1}{2} + q \quad \Rightarrow \quad q \geq \frac{1}{4}$$

$$F_X(3) = 1, \quad F_Y(3) = \frac{1}{2} - q + \frac{1}{2}, \quad 1 - q \leq 1 \quad \Rightarrow \quad q \geq 0$$

Zusammengefasst muss q im Intervalll $[\frac{1}{4}, \frac{1}{2}]$ liegen.

c) Ermitteln Sie das Intervall für die Wahrscheinlichkeit des zweiten Zustandes, bei dem $Y_{SSD} \succeq X$ gilt. (7 Punkte)

Lösung:

Damit $Y_{SSD} \succeq X$ gilt muss folgende Ungleichung gelten:

$$\forall s \qquad \int_{-\infty}^{s} F_Y(t)dt - \int_{-\infty}^{s} F_X(t)dt \le 0.$$

Wir betrachten einen Punkt t^* (als Obergrenze des Integrals). Wir haben nun vier Fälle zu unterscheiden.

Beginnen wir mit dem **ersten Fall** $t^* = 1$

$$\int_0^{t^*} F_Y(t)dt - \int_0^{t^*} F_X(t)dt = 0 - 0 = 0$$

Für den **zweiten Fall** $t^* = 2$ haben wir

$$\begin{aligned}\int_0^{t^*} F_Y(t)dt - \int_0^{t^*} F_X(t)dt &= (0 + \frac{1}{2} - q) - (0 + \frac{1}{2}) \\ &= -q \le 0 \quad \Rightarrow \quad q \ge 0\end{aligned}$$

Für den **dritten Fall** $t^* = 3$ haben wir

$$\begin{aligned}\int_0^{t^*} F_Y(t)dt - \int_0^{t^*} F_X(t)dt &= (0 + \frac{1}{2} - q + 1 - q) - (0 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + q) \\ &= \frac{1}{2} - 3q \le 0 \quad \Rightarrow \quad q \ge \frac{1}{6}\end{aligned}$$

Für den **vierten Fall** $t^* = 4$ haben wir

$$\begin{aligned}\int_0^{t^*} F_Y(t)dt - \int_0^{t^*} F_X(t)dt &= (0 + \frac{1}{2} - q + 1 - q + 1 - q) - (0 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + q + 1) \\ &= \frac{1}{2} - 4q \le 0 \quad \Rightarrow \quad q \ge \frac{1}{8}\end{aligned}$$

Zusammengefasst muss q im Intervalll $[\frac{1}{6}, \frac{1}{2}]$ liegen.

Aufgabe 3 (10 Punkte)

Ein Investor, dessen Arrow-Pratt-Maß (absolute Risikoaversion) konstant gleich 0,2 ist, könnte eine Investition durchführen, die zu einem Endvermögen in Höhe von X Geldeinheiten führt. Bezüglich X sind folgende Momente bekannt: $\mathrm{E}[X] = 25$ und $\mathrm{E}[X^2] = 650$. Bestimmen Sie den (approximierten) erwarteten Nutzen $\mathrm{E}[U(X)]$, wenn die Nutzenfunktion des Investors folgende Eigenschaft hat: $U(0) = 0$ und $U'(0) = 0,2$.

Hinweis: Berechnen Sie die Markowitz-Prämie mit der Approximationsformel.

Lösung

Mit konstantem Arrow-Pratt-Maß, $U(0) = 0$ und $U'(0) = 0,2$ ist $U(x) = 1 - e^{-0,2x}$ eindeutig festgelegt. Es gilt weiter $z = \mathrm{E}[X] - \pi$, wobei sich die Makrowitz-Prämie π nach der Approximationsformel als

$$\pi \approx \frac{1}{2} \times V[X] \times ARA = \frac{1}{2} \times 25 \times 0,2 = 2,5$$

ergibt mit $V(X) = \mathrm{E}[X^2] - (\mathrm{E}[X])^2 = 650 - 625 = 25$. Somit ist das Sicherheitsäquivalent $z = \mathrm{E}[X] - \pi = 25 - 2,5 = 22,5$ und der erwartete Nutzen $\mathrm{E}[u(X)] = U(z) = 1 - e^{-0,2 \times 22,5} = 0,98889$

Aufgabe 4 (20 Punkte)

Es gibt nur ein risikoloses Asset (Y^1) mit dem Erwartungswert 1,05 und dem Preis 1, sowie zwei riskante Titel (Y^2, Y^3) mit folgenden Erwartungswerten, Preisen und Kovarianzmatrix

$$\mathrm{E}[Y^2] = 10, \quad \mathrm{E}[Y^3] = 8, \quad p(Y^2) = 2,5, \quad p(Y^3) = 1,5$$
$$\mathrm{Cov} = \begin{pmatrix} \mathrm{Var}[Y^2] = 4 & \mathrm{Cov}[Y^2, Y^3] = 1,2 \\ \mathrm{Cov}[Y^2, Y^3] = 1,2 & \mathrm{Var}[Y^3] = 7 \end{pmatrix}.$$

a) Wie sieht das optimale Portfolio eines Investors aus, der die Nutzenfunktion $\mathrm{E}[X] - \frac{1}{2}\mathrm{Var}[X]$ und ein Vermögen von 100 besitzt? (8 Punkte)

Lösung

Das Maximierungsproblem lautet

$$\max_{p(X)=100} \mathrm{E}[X] - \frac{1}{2}\mathrm{Var}[X]$$

oder nach Einsetzen der Daten

$$\max_{X_1 \cdot 1 + X_2 \cdot 2,5 + X_3 \cdot 1,5 = 100} 1,05X_1 + 10X_2 + 8X_3 - \frac{1}{2}\left(4X_2^2 + 2 \cdot 1,2X_2X_3 + 7X_3^2\right).$$

Wir formen die Nebenbedingung um und setzen sie in die Maximierung selbst ein

$$\max_{X_2, X_3} 1,05 \cdot (100 - 2,5X_2 - 1,5X_3) + 10X_2 + 8X_3 - \frac{1}{2}\left(4X_2^2 + 2 \cdot 1,2X_2X_3 + 7X_3^2\right).$$

Diese Maximierungsaufgabe lösen wir durch einfache Ableitungen nach X_2 und X_3

$$0 = \frac{\partial}{\partial X_2} = -2,625 + 10 - 4X_2 - 1,2X_3$$
$$0 = \frac{\partial}{\partial X_3} = -1,575 + 8 - 1,2X_2 - 7X_3$$

Dieses Gleichungssystem hat die Lösung

$$X_2 = 1,653426, \quad X_3 = 0,63441, \quad \text{und} \quad X_1 = 94,91482.$$

b) Wie sieht das optimale Portfolio eines (anderen) Investors aus, der die Nutzenfunktion $\mathrm{E}[X] - \mathrm{Var}[X]$ und ein Vermögen von 80 besitzt? (8 Punkte)

Lösung

Das Maximierungsproblem lautet nun

$$\max_{p(X)=80} \mathrm{E}[X] - \mathrm{Var}[X]$$

oder nach Einsetzen der Daten

$$\max_{X_1 \cdot 1 + X_2 \cdot 2{,}5 + X_3 \cdot 1{,}5 = 80} 1{,}05 X_1 + 10 X_2 + 8 X_3 - \left(4X_2^2 + 2 \cdot 1{,}2 X_2 X_3 + 7 X_3^2\right).$$

Wir formen die Nebenbedingung um und setzen sie in die Maximierung selbst ein

$$\max_{X_2, X_3} 1{,}05 \cdot (80 - 2{,}5X_2 - 1{,}5X_3) + 10X_2 + 8X_3 - \left(4X_2^2 + 2 \cdot 1{,}2X_2X_3 + 7X_3^2\right).$$

Diese Maximierungsaufgabe lösen wir durch einfache Ableitungen nach X_2 und X_3

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{\partial}{\partial X_2} = -2{,}625 + 10 - 8X_2 - 2{,}4X_3 \\ 0 &= \frac{\partial}{\partial X_3} = -1{,}575 + 8 - 2{,}4X_2 - 14X_3 \end{aligned}$$

Dieses Gleichungssystem hat die Lösung

$$X_2 = 0{,}8267132, \quad X_3 = 0{,}317206, \quad \text{und} \quad X_1 = 77{,}457.$$

c) Setzen Sie für jeden Investor die optimalen Mengen beider riskanten Wertpapiere ins Verhältnis. Erläutern Sie den sichtbaren Zusammenhang. (4 Punkte)

Lösung

$$\frac{X_2^a}{X_3^a} = \frac{X_2^b}{X_3^b} = 2{,}6062$$

Skript Seit 68.

> [Tobin–Separation] Angenommen ein Investor maximiert eine μ-σ–Nutzenfunktion. Dann haben die riskanten Titel in seinem optimalen Portfolio ein Verhältnis zueinander, das nicht von der Nutzenfunktion und auch nicht von seinem Einkommen abhängt. Dieses Portfolio wird auch Preisportfolio genannt.

Schmierblatt Nr. 1

Schmierblatt Nr. 2