WS 06/07

Aufgabe 1 (13 Punkte) Es gebe zwei Zustände der Welt, die gleichwahrscheinlich sind. Ein riskanter Titel zahlt in einem Zustand 1 Geldeinheit und im zweiten Zustand 2 Geldeinheiten, und dieser Titel kostet 1.25. Der risikolose Zins beträgt 5%.

Der Investor hat eine Erwartungsnutzenfunktion $u(x) = \ln(x)$. Berechnen Sie das nutzenoptimale Portfolio, wenn der Investor 4 Geldeinheiten besitzt.

$X = X_1 Y_1 + X_2 Y_2$ $\quad [E(Y^2) = \frac{1}{2}\cdot 2 + \frac{1}{2}\cdot 1 = 1{,}5]$

13

sehr schön

$\max E(u(x))$ s.t. $X_1 + 1{,}25 X_2 = 4 \Leftrightarrow X_1 = 4 - 1{,}25 X_2$

$$E(\ln(X)) = \frac{1}{2}\ln(1{,}05 X_1 + X_2) + \frac{1}{2}\ln(1{,}05 X_1 + 2X_2)$$
$$= \frac{1}{2}\ln(1{,}05(4 - 1{,}25 x_2) + x_2) + \frac{1}{2}\ln(1{,}05(4 - 1{,}25 x_2) + x_2)$$
$$= \frac{1}{2}\left(\ln(4{,}2 - 0{,}3125 x_2) + \ln(4{,}2 + 0{,}68\cancel{75}x_2)\right)$$

nach x_2 differenzieren:

$$\frac{1}{2}\left(\frac{-0{,}3125}{4{,}2 - 0{,}3125 x_2} + \frac{0{,}687}{4{,}2 + 0{,}68\cancel{75}x_2}\right) \stackrel{!}{=} 0 \Leftrightarrow \frac{0{,}3125}{4{,}2 - 0{,}3125 x_2} = \frac{0{,}6875}{4{,}2 + 0{,}68\cancel{75}x_2}$$

siehe gegenüber

Aufgabe 2 (13 Punkte) Betrachten Sie Güterbündel mit je zwei positiven Gütermengen $X = (X_0, X_1)$ (es gilt also immer $X_i > 0$) und folgende Präferenzrelation für diese Güterbündel

13

$$X \succeq Y \iff \frac{X_0 - Y_1}{Y_0 + X_1} \geq \frac{Y_0 - X_1}{X_0 + Y_1}.$$

(a) Ist diese Präferenzrelation vergleichbar und transitiv? Begründen Sie Ihre Aussage. Geben Sie gegebenenfalls eine Nutzenfunktion an.

Vergleichbarkeit

$$X \succeq Y \Leftrightarrow (X_0 - Y_1)(X_0 + Y_1) \geq (Y_0 - X_1)(Y_0 + X_1)$$

„≥" bleibt erhalten da $X_0 + Y_1 > 0$ und $X_1 + Y_0 > 0$

$$\Leftrightarrow X_0^2 - Y_1^2 \geq Y_0^2 - X_1^2 \Leftrightarrow \underline{\underline{X_0^2 + X_1^2 \geq Y_0^2 + Y_1^2}}$$

$$(X_0^2 + X_1^2), (Y_0^2 + Y_1^2) \in \mathbb{R} \Rightarrow X \succeq Y \text{ oder } X \preceq Y \text{ gilt}$$

Transitivität:

zz gilt: $\begin{pmatrix} X_0 \\ X_1 \end{pmatrix} \succeq \begin{pmatrix} Y_0 \\ Y_1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow X_0^2 + X_1^2 \geq Y_0^2 + Y_1^2 \;\wedge\; \begin{pmatrix} Y_0 \\ Y_1 \end{pmatrix} \succeq \begin{pmatrix} Z_0 \\ Z_1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow Y_0^2 + Y_1^2 = Z_0^2 + Z_1^2$

$\rightarrow$ mit $(X_0^2 + X_1^2), (Y_0^2 + Y_1^2), (Z_0^2 + Z_1^2) \in \mathbb{R}$ $\quad X_0^2 + X_1^2 \geq Z_0^2 + Z_1^2 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} X_0 \\ X_1 \end{pmatrix} \succeq \begin{pmatrix} Z_0 \\ Z_1 \end{pmatrix}$

$$\frac{4,2-0,3125x_2}{0,3125} = \frac{4,2+0,6875x_2}{0,6875} \Leftrightarrow 13,44 - x_2 \quad = 6,1091 + x_2$$

$$2x_2 = 7,3309 \Leftrightarrow x_2 = 3,66545$$

$$\Rightarrow x_1 = 4 - 1,25 \cdot 3,66545 = -0,5818$$

$$\Rightarrow X = \begin{pmatrix} -0,5818 \\ 3,66545 \end{pmatrix}$$

$$\cancel{E(\ln(X)) = \frac{1}{2}\ln(1,05x_1 + x_2) \qquad + \frac{1}{2}\ln(1,05X_1 + 2X_2)}$$

$$\cancel{x_1 = 4 - 1,25x_2}$$

$$\cancel{\frac{1}{2}\ln(1,05(4-1,25x_2) + x_2) + \frac{1}{2}\ln(1,05(4-1,25x_2) + 2x_2)}$$

$$\cancel{= \frac{1}{2}\ln(4,2 - 1,3125x_2) + x_2) + \frac{1}{2}\ln(4,2 - 1,3125x_2) + 2x_2)}$$

$$\cancel{= \frac{1}{2}\ln(4,2 - 0,3125x_2) + \frac{1}{2}\ln(4,2 + 0,6875x_2)}$$

$$\cancel{= \frac{1}{2}\ln(1,05x_1 + X_2) + \frac{1}{2}\ln(1,05x_1 + 2X_2)} \quad ..$$

$$\cancel{(x_0 - y_1)(x_0 + y_1) \geq (y_0 + x_1)(y_0 - x_1)}$$

$$\cancel{x_0^2 - y_1^2 \geq y_0^2 - x_1^2}$$

$$x_0^2 + x_1^2 \geq y_0^2 + y_1^2$$

(b) Ist die Präferenzrelation monoton? Begründen Sie Ihre Aussage.

Die Präferenzrelation ist monoton, da sie sich aus den Quadraten der Einträgen, die anschließend addiert werden, zusammensetzt. Für wachsende x_0, x_1 wird der Nutzen immer größer, da die ~~Summe~~ quadrierten Einträge monoton wachsen, somit deren Summe und letztlich der Nutzen $u(X)$.

Aufgabe 3 (10 Punkte) (a) Definieren Sie die Begriffe risikoavers, risikofreudig und risikoneutral für einen Investor mit einer Erwartungsnutzenfunktion $u(x)$.

Hinweis: In der Vorlesung haben wir diesbezüglich sowohl eine Definition als auch ein Theorem kennen gelernt. Sie müssen nur eine der beiden Aussagen hier angeben.

10

Ein Investor heißt;

risikoavers, falls $E(u(x)) < u(E(x))$

risikoneutral, falls $E(u(x)) = u(E(x))$

risikofreudig, falls $E(u(x)) > u(E(x))$ gilt.

(b) Definieren Sie die Markowitz-Prämie.

Die Markowitzprämie, auch Risikoprämie genannt, ~~ist~~ um Risiko zu übernehmen unter der Nutzenfkt. $u(x)$, ist derjenige Betrag π, der die Gleichung

$$E(u(X)) = u(E(X)-\pi)$$ erfüllt, wobei X eine unsichere Zahlung ist.

Aufgabe 4 (11 Punkte) Beweisen Sie folgende Aussage: Wenn die absolute Risikoaversion konstant ist, dann hat der Investor eine kardinale Erwartungsnutzenfunktion vom Typ

$$u(x) = -e^{-ax}$$

$$-\frac{u''(t)}{u'(t)} = \text{const} = a \qquad 11$$

$$\Rightarrow \frac{d(\ln u'(t))}{dt} = -a \Rightarrow \ln u'(t) - \ln u'(0) = \cancel{\ldots} -\int_0^t a\,dt$$

$$= -at \Rightarrow \ln u'(t) = -at + \underbrace{\ln u'(0)}_{c} \Rightarrow u'(t) = e^{-at+c}$$

$$\Rightarrow u(t) - u(0) = \cancel{e^{-at+c}} \int_0^t e^{-at+c}\,dt = \left[-\frac{1}{a} e^{-at+c}\right]_0^t = -\frac{1}{a}\left(e^{-at+c} + e^{c}\right)$$

Aufgabe 5 (13 Punkte) Es gebe drei Zustände der Welt, die alle gleich wahrscheinlich seien. Zwei am Markt gehandelte Titel mögen die Zahlungen Siehe gegenüber

$$X^1 = \begin{pmatrix} 6 \\ 5 \\ 4 \end{pmatrix}, \quad X^2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix},$$

haben. 13

a) Bestimmen Sie den Vektor der Erwartungswerte.

$$E(X^1) = (6+5+4) \cdot \frac{1}{3} = 5$$

$$E(X^2) = (3+5+2) \cdot \frac{1}{3} = \frac{10}{3}$$

Fortsetzung A4:

addiere $u(0)$, multipliziere mit $-ae^{-c}$

das sind beides monoton steigende Transformation

$\Rightarrow$ Nutzenordnung bleibt erhalten $\Rightarrow$ Behauptung

b) Bestimmen Sie die Kovarianzmatrix. Ist ein Titel redundant?

$$Cov(X_1, X_2) = E(X_1 X_2) - E(X_1)\,E(X_2) =$$

$$= \left[6 \cdot 3 \cdot \frac{1}{3} + 5 \cdot 5 \cdot \frac{1}{3} + 4 \cdot 2 \cdot \frac{1}{3}\right] - \left[5 \cdot \frac{10}{3}\right] =$$

$$= 6 + \frac{25}{3} + \frac{8}{3} - \frac{50}{3} = \frac{1}{3}$$

$$V(X_1) = E(X_1^2) - E(X_1)^2 = (36 + 25 + 16) \cdot \frac{1}{3} - 25 = \frac{2}{3}$$

$$Var(X_2) = E(X_2^2) - E(X_2)^2 = (9 + 25 + 4) \cdot \frac{1}{3} - \frac{100}{9} = \frac{14}{9} \Rightarrow \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{14}{9} \end{pmatrix}$$

c) Nehmen Sie an, dass die beiden riskanten Titel eine identische erwartete Rendite von 10% besitzen. Berechnen Sie die Preise für beide Titel.

$$p(X_1) = \frac{E(X_1)}{1{,}1} = \frac{5}{1{,}1} = 4{,}5455$$

$$p(X_2) = \frac{E(X_2)}{1{,}1} = \frac{\frac{10}{3}}{1{,}1} = 3{,}0303$$