Fach:	Banken und Finanzierung
Prüfer:	Prof. Dr. Dr. A. Löffler
Veranstaltung:	Entscheidungstheorie (SBWL) WS 07/08
CP anrechnen lassen für: ggfls. streichen und dann bitte Veranstaltung und Prüfungsnummer angeben	Entscheidungstheorie (SBWL) WS 07/08

Name	
Vorname	
Matrikelnummer Wenn nicht WISO bitte Studiengang	
Punkte	
Note	

Beachten Sie bitte folgende Hinweise:

1. Schreiben Sie bitte Ihre Lösung in die vorgegebenen Leerzeilen des Aufgabenblattes sowie, sollte der Platz nicht ausreichen, auf die leeren Rückseiten.
2. Rechnen Sie auf mindestens fünf genaue Ziffern (das sind nicht notwendigerweise fünf Nachkommastellen) im Endergebnis.[1]
3. Eine Aufgabe wird nur dann gewertet, wenn der Lösungsweg klar zu erkennen ist.
4. Klausuren, die unleserlich sind, werden nicht bewertet. Das gleiche gilt, wenn Sie mit Bleistift schreiben.
5. Nur nicht–programmierbare Taschenrechner sowie ein Wörterbuch ohne handschriftliche Einträge sind zugelassen.
6. Diese Klausur enthält ohne Deckblatt **7** Seiten (davon 2 Schmierblätter am Ende).

Und nun **viel Erfolg** ...

[1] Ist das exakte Ergebnis beispielsweise 113.941,7234, dann bedeutet eine Genauigkeit auf fünf Ziffern 113.940.

Aufgabe 1 (6 Punkte) Betrachten Sie Güterbündel mit jeweils drei Gütern $X = (X_1, X_2, X_3)$ (mit $\mathbf{X_1, X_2, X_3 > 0}$) und folgende Nutzenfunktion

$$U(X) = X_1 + X_2 - X_3.$$

Prüfen Sie, ob die folgenden Nutzenfunktionen die gleiche Präferenz repräsentieren:

(a) $U^*(X) = \frac{X_1 \cdot X_2 - X_2 \cdot X_3 - X_1 \cdot X_3}{X_1 \cdot X_2 \cdot X_3}$

Lösung a): NEIN.

$U^*(X) = -\frac{1}{X_1} - \frac{1}{X_2} + \frac{1}{X_3}$

Gegenbeispiel:

$$X = (0.6, 0.5, 1); Y = (1, 0.2, 1)$$

$$U(X) = 0.6 + 0.5 - 1 = 0.1 < U(Y) = 1 + 0.2 - 1 = 0.2$$

$$U^*(X) = -\frac{1}{0.6} - \frac{1}{0.5} + \frac{1}{1} = -2\frac{2}{3} > U^*(Y) = -\frac{1}{1} - \frac{1}{0.2} + 1 = -5$$

(b) $U^*(X) = X_1^2 + X_2^2 - X_3^2$.

Lösung b): NEIN.

Gegenbeispiel:

$$X = (\frac{2}{3}, \frac{2}{3}, 1); Y = (1, \frac{1}{4}, 1)$$

$$U(X) = \frac{2}{3} + \frac{2}{3} - 1 = \frac{1}{3} > U(Y) = 1 + \frac{1}{4} - 1 = \frac{1}{4}$$

$$U^*(X) = (\frac{2}{3})^2 + (\frac{2}{3})^2 - 1 = -\frac{1}{9} < U^*(Y) = 1^2 + (\frac{1}{4})^2 - 1 = \frac{1}{16}$$

Aufgabe 2 (12 Punkte) Betrachten Sie zwei Investoren (I und II) mit folgenden Nutzenfunktionen U:

$$U_I(x) = -e^{-2x} + 100$$

$$U_{II}(x) = 2\sqrt{x} + 30$$

a) Berechnen Sie die Kennzahlen ARA und RRA für jede Nutzenfunktion. (4 Punkte)

Lösung a):

$$
\begin{aligned}
U_I(x) &= -e^{-2x} + 100 \\
U_I^{'}(x) &= -e^{-2x} \cdot -2 = 2e^{-2x} \\
U_I^{''}(x) &= 2e^{-2x} \cdot -2 = -4e^{-2x} \\
ARA_I &= -\frac{U_I^{''}(x)}{U_I^{'}(x)} = -\frac{-4e^{-2x}}{2e^{-2x}} = 2 \\
RRA_I &= 2x
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
U_{II}(x) &= 2\sqrt{x} + 30 \\
U_{II}^{'}(x) &= 2 \cdot \frac{1}{2}x^{\frac{1}{2}-1} = x^{-\frac{1}{2}} \\
U_{II}^{''}(x) &= -\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}-1} = -\frac{1}{2}x^{-\frac{3}{2}} \\
ARA_{II} &= -\frac{-\frac{1}{2}x^{-\frac{3}{2}}}{x^{-\frac{1}{2}}} = \frac{1}{2}x^{-1} \\
RRA_{II} &= \frac{1}{2}x^{-1} \cdot x = \frac{1}{2}
\end{aligned}
$$

b) Wie verändern sich beide Kennzahlen jeweils, wenn das Vermögen x steigt. (4 Punkte)

Lösung b):

$$
\begin{aligned}
ARA_I^{'} &= 0 \\
RRA_I^{'} &= 2 > 0 \\
ARA_{II}^{'} &= -\frac{1}{2}x^{-2} < 0 \\
RRA_{II}^{'} &= 0
\end{aligned}
$$

c) Welche Konsequenzen hat das steigende Vermögen auf das Investitionsverhalten der beiden Investoren, wenn nur in ein risikoloses und in ein riskantes Wertpapier investiert werden kann? (4 Punkte)

Lösung c): Bei steigendem Vermögen wird der Investor I genau die gleiche Menge wie vorher in riskantes Wertpapier investieren. Alle was er jetzt zusätzlich an Vermögen hat legt er als risikoloses Wertpapier an. Somit sinkt der Anteil des riskanten Werpapiers im Portfolio.

Der Investor II wird bei steigendem Vermögen weniger absolut risikoavers. Er investiert mehr an riskantes Wertpapier, genau so viel mehr bis der Anteil der riskanten Wertpapier im Portfolio den vorherigen Wert gerade erreicht.

Aufgabe 3 (12 Punkte) Sie haben gerade das Grundstudium abgeschlossen. Zur Finanzierung des ersten Monats Ihres Hauptstudiums haben Sie zwei Möglichkeiten (I und II):

I) Sie nehmen einen Job als studentische Hilfskraft an, der mit 325 € monatlich dotiert ist.

II) Sie arbeiten für einen Vermögensberater, der Sie erfolgsabhängig bezahlt. Sie bekommen eine Provision in Höhe von 15% Ihres Umsatzes. Sie erwarten in Abhängigkeit der Marktentwicklung die folgenden Umsätze:

Umsatz	Wahrscheinlichkeit
1000	0,25
2500	0,25
4000	0,50

a) Ihre Präferenzen werden durch die Nutzenfunktion $U(x) = 100 + 20 \ln x$ beschrieben. Welchen Job werden Sie annehmen? (6 Punke)

Lösung a):

$$\begin{aligned}
E[U_I(x)] &= 100 + 20 \ln 325 = 215,6765 \\
E[U_{II}(x)] &= 100 + 20(\ln(1000 \cdot 15\%) \cdot 0.25 + \ln(2500 \cdot 15\%) \cdot 0.25 + \ln(4000 \cdot 15\%) \cdot 0.5) \\
&= 100 + 20 \cdot (1,25266 + 1,48173 + 3,19846) = 218,657 \\
&\Rightarrow \quad \text{Job II sollte man annehmen.}
\end{aligned}$$

b) Wie hoch sollte ceteris paribus der Minimalumsatz (kleinste Umsatz) sein, damit Sie indifferent zwischen den beiden Jobs werden? (6 Punkte)

Lösung b):

$$\begin{aligned}
E[U_I(x)] &= E[U_{II}(x)] \\
215,6765 &= 100 + 20 \cdot (\ln(k \cdot 15\%) \cdot 0.25 + 1,48173 + 3,19846) \\
\frac{215,6765 - 100}{20} &= \ln(k \cdot 15\%) \cdot 0.25 + 1,48173 + 3,19846 \\
1,103635 &= \ln(k \cdot 15\%) \cdot 0.25 \\
\Rightarrow \quad k &= 550,9588
\end{aligned}$$

Aufgabe 4 (20 Punkte) Sie haben 10.000 € geerbt und möchten das Geld auf dem Kapitalmarkt für ein Jahr anlegen. Der Kapitalmarkt ist perfekt. Folgende Anlageformen stehen zur Verfügung:

Aktienanleihe (A) zum Nennbetrag von 500 € Die Anleihe ist in genau einem Jahr fällig, der Kupon beträgt 20%. Die Rückzahlung dieser Anleihe erfolgt

- entweder zu 100%, falls der Kurs der Aktie (S) in einem Jahr mindestens 25 € beträgt
- oder durch Lieferung von 20 Aktien pro Anleihe, falls der Kurs der Aktie unter 25 € liegt.

Der Kupon wird in jedem Fall gezahlt.

Die Aktie notiert heute zu 25 €. Der Aktienkurs in genau einem Jahr ist gleichverteilt im Interval $[20, 40]$ und kann jede reelle Zahl annehmen.

Normales Sparbuch (N) Das Sparbuch bietet eine feste Verzinsung in Höhe von 2,5% pro Jahr.

a) Geben Sie eine Gleichung für die Rückzahlung der Aktienanleihe **A** an. (5 Punkte)

Lösung a):

$$A = \begin{cases} 20S + 500 \cdot 20\% & \text{falls } S < 25 \\ 500 + 500 \cdot 20\% & \text{falls } S \geq 25 \end{cases}$$

b) Berechnen Sie den Erwartungswert und die Varianz der Rückzahlung von **A**. (6 Punkte)

Lösung b):

$$\text{Dichte:} \quad f(S) = \frac{1}{40-20} = \frac{1}{20}$$

$$\begin{aligned} E[A] &= 100 + \left[\int_{20}^{25} 20S \cdot \frac{1}{20} \cdot dS + \int_{25}^{40} 500 \cdot \frac{1}{20} \cdot dS \right] \\ &= 100 + 112,5 + 375 \\ &= 587,5 \\ Var[A] &= \int_{20}^{25} (20S)^2 \cdot \frac{1}{20} \cdot dS + \int_{25}^{40} 500^2 \cdot \frac{1}{20} \cdot dS - (587,5 - 100)^2 \\ &= \left[\frac{20}{3} S^3 \right]_{20}^{25} + \left[\frac{500^2}{20} S \right]_{25}^{40} - 487,5^2 \\ &= 50833,33 + 187500 - 237656,25 = 677,0833 \end{aligned}$$

c) Sie haben eine Nutzenfunktion der Form

$$U(X) = E[X] - \frac{1}{2} Var[X],$$

wobei X **das Vermögen/die Zahlung** bezeichnet. Ermitteln Sie die optimale Anlagestrategie bestehend aus Aktienanleihe **A** und Normalem Sparbuch **N**. (9 Punkte)

Lösung c): der Preis der Aktienanleihe: $P(A) = 500$

setzen den Preis des risikolosen WPs (hier Normales Sparbuch) gleich dem der Aktienanleihe: $P(N) = 500$

Portfolio: $X = n \cdot N + a \cdot A$

Nebenbedingung: $500n + 500a = 10000$ bzw. $n = 20 - a$

$$\begin{aligned} E[X] &= E[(20-a) \cdot N + a \cdot A] \\ &= (20-a) \cdot 500 \cdot (1 + 2,5\%) + a \cdot 587,5 \\ &= 10250 + 75a \\ Var[X] &= Var[(20-a) \cdot N + a \cdot A] \\ &= a^2 Var[A] \\ &= 677,083a^2 \end{aligned}$$

Damit ist das Entscheidungsproblem

$$\max U(X) = 10250 + 75a - \frac{1}{2}677,083a^2$$

$$\begin{aligned} \max U(X) &= 10250 + 75a - \frac{1}{2}677,083a^2 \\ \frac{\partial U(X)}{\partial a} &= 75 - 677,083a = 0 \\ a &= 0,11077 \quad \text{(0,11077 Stück Aktienanleihe kaufen)} \\ 20 - a &= 19,889 \quad (19,889 \cdot 500 = 9944,615 \text{ in normales Sparbuch investitieren}) \end{aligned}$$

Schmierblatt Nr. 1

Schmierblatt Nr. 2