Zwischenklausur

Fach: Finanzierung und Investition

Prüfer: Prof. Dr. Dr. A. Löffler

Veranstaltung: W2263 Entscheidungstheorie Endklausur

Name	Musterlösung
Vorname	
Matrikelnummer	
Punkte	

Beachten Sie bitte folgende Hinweise:

1. Schreiben Sie bitte Ihre Lösung in die vorgegebenen Leerzeilen des Aufgabenblattes sowie, sollte der Platz nicht ausreichen, auf die leeren Rückseiten.
2. Rechnen Sie auf mindestens fünf genaue Ziffern (das sind nicht notwendigerweise fünf Nachkommastellen) im Endergebnis.[1]
3. Eine Aufgabe wird nur dann gewertet, wenn der Lösungsweg klar zu erkennen ist.
4. Klausuren, die unleserlich sind, werden nicht bewertet. Das gleiche gilt, wenn Sie mit Bleistift schreiben.
5. Nur nicht–programmierbare Taschenrechner sowie ein Wörterbuch ohne handschriftliche Einträge sind zugelassen.
6. Diese Klausur enthält inklusive dieses Deckblatts **10** Seiten.

Und nun **viel Erfolg . . .**

[1] Ist das exakte Ergebnis beispielsweise 113.941,7234, dann bedeutet eine Genauigkeit auf fünf Ziffern 113.940.

Aufgabe 1 (3 Punkte)

Ein Entscheidungsträger besitzt eine Erwartungsnutzenfunktion. Wie verändert er die Menge und den Anteil riskanter Titel im einfachen Portfolioproblem, wenn sein Vermögen x sinkt?
Hinweis: Bitte tragen Sie in die folgende Tabelle lediglich die Wörter "steigt", "fällt", "keine Änderung" oder "nicht eindeutig" ein.

	ARA fällt ($ARA'(x) < 0$)	RRA fällt ($RRA'(x) < 0$)	
Menge riskanter Titel	fällt	fällt	je 0,5P
Anteil riskanter Titel	nicht eindeutig	fällt	je 1P

Aufgabe 2 (2 Punkte)

Ein Entscheidungsträger besitzt eine Mu-Sigma-Nutzenfunktion. Notieren Sie kurz, wie sich die Zusammensetzung seines riskanten Portfolios ändert, wenn sein Vermögen steigt.

Tobin Seperation $\rightarrow$ $\underbrace{\text{keine Änderung}}_{2P}$

Aufgabe 3 (2 Punkte)

Nennen Sie eine beliebige Erwartungsnutzenfunktion der CARA- und der CRRA-Klasse.

CARA: u(x)= $\underbrace{-e^{-ax}}_{1P}$

CRRA: u(x)= $\underbrace{\ln(x)}_{1P}$

Auf alle zulässigen Spezialfälle $u^*(x) = a\,u(x) + b$ volle Punktzahl, auch mit konkreten Zahlenwerten für a, b.

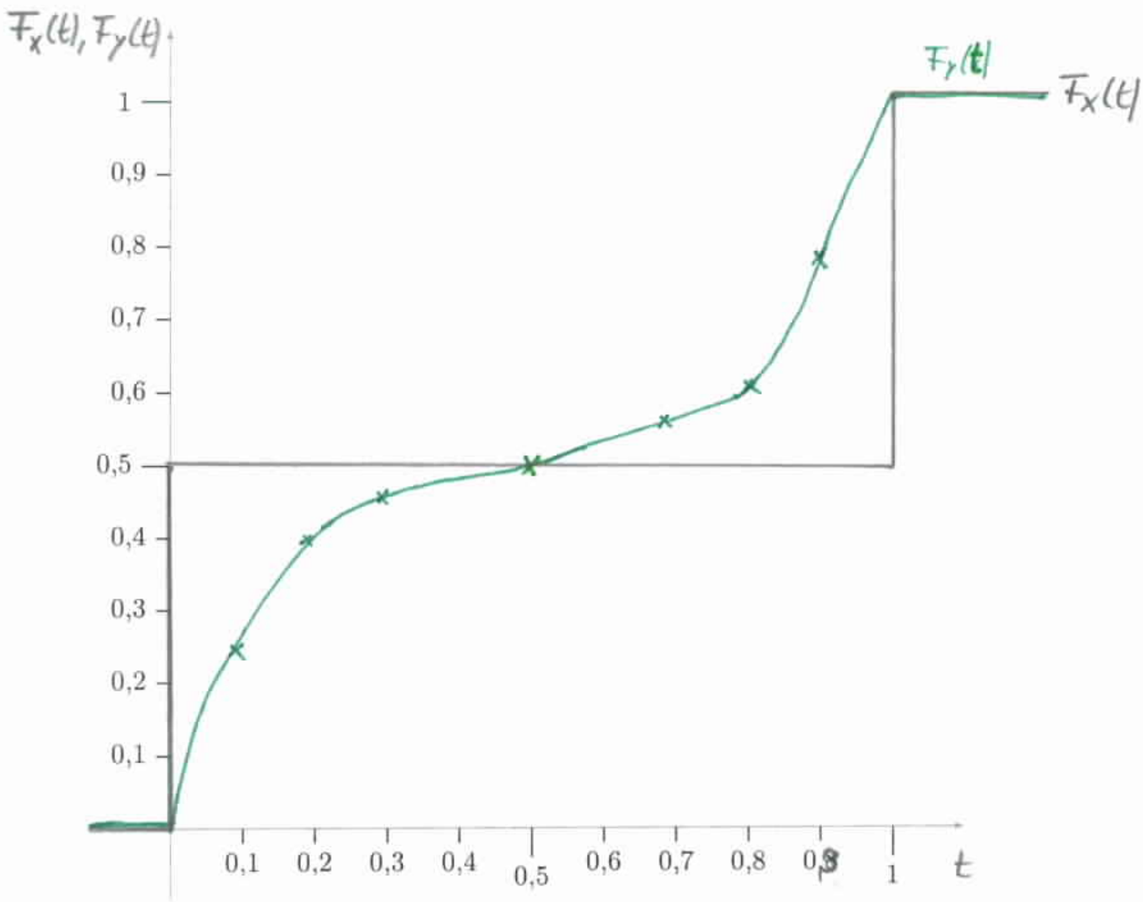
Aufgabe 4 (14 Punkte)

Zwei Wertpapiere X und Y zahlen in t=1 jeweils einen zufälligen Betrag t zwischen null und eins. Dieser jeweilige Rückfluss besitzt die folgende Verteilungsfunktion:

Wertpapier X: $$F_X(t) = \begin{cases} 0 & \text{für } t < 0 \\ \frac{1}{2} & \text{für } 0 \leq t \leq 1 \\ 1 & \text{sonst} \end{cases}$$

Wertpapier Y: $$F_Y(t) = \begin{cases} 0 & \text{für } t < 0 \\ 4(t - \frac{1}{2})^3 + \frac{1}{2} & \text{für } 0 \leq t \leq 1 \\ 1 & \text{sonst.} \end{cases}$$

a) Skizzieren Sie die beiden Verteilungsfunktionen im folgenden Koordinatensystem und beschriften Sie die Achsen *(4 Punkte)*.



Achsenbeschriftung 0,5P
$F_X(t)$ 1P
$F_Y(t)$ 2,5P

Skizze genügt.
Form getroffen 1P
Schnittpunkt bei t=0,5 getroffen 1P
"Saubere Ausführung" 0,5P
(kein wildes Geschmiere)

b) Nennen Sie die allgemeinen Bedingungen für ein Vorliegen stochastischer Dominanz erster Ordnung (FSD) und zweiter Ordnung (SSD) *(3 Punkte)*.

$X \succ Y$

FSD: $\underbrace{F_X(t) \leq F_Y(t) \quad \forall t}_{0{,}5P} \Rightarrow \underbrace{E(u(X)) \geq E(u(Y))}_{0{,}5P}$

0,5P (wenn Reihenfolge entsprechend Bedingung korrekt)

SSD: $\underbrace{\int_{-\infty}^{s} F_X(t)\,dt \leq \int_{-\infty}^{s} F_Y(t)\,dt \quad \forall s}_{1{,}5P} \Rightarrow \underbrace{E(u(X)) \geq E(u(Y))}_{0{,}5P\ (s.o.)}$

c) Prüfen und begründen Sie, ob im Fall der gegebenen Wertpapiere FSD und/oder SSD vorliegt. *Hinweis: Ihre Prüfung zur FSD muss nicht rechnerisch erfolgen, sondern kann allein auf Ihrer Zeichnung aus Aufgabenteil a) beruhen (7 Punkte).*

FSD: Liegt nicht vor, da Schnittpunkt von $F_X(t)$ und $F_Y(t)$ (bei $t=0{,}5$) 1,5P

SSD: $\int_0^s \left[4(t-\tfrac{1}{2})^3+\tfrac{1}{2}\right]dt - \int_0^s \tfrac{1}{2}\,dt \leq 0$ für $0 \leq s \leq 1$

Bedingung inklusive Wertebereich für s: 1,5P

$\Leftrightarrow \int_0^s 4(t-\tfrac{1}{2})^3\,dt \leq 0$

$\Leftrightarrow \left[(t-\tfrac{1}{2})^4\right]_0^s \leq 0$

korrekte Stammfkt. gebildet 1P

$\Leftrightarrow (s-\tfrac{1}{2})^4 - (\tfrac{1}{2})^4 \leq 0$

$\Leftrightarrow (s-\tfrac{1}{2})^4 \leq (\tfrac{1}{2})^4 \quad |(\ )^{\frac{1}{4}}$

Vierte Wurzel genommen 1P

$s-\tfrac{1}{2} \leq \tfrac{1}{2}$

$s \leq 1$

korrektes Ergebnis 1P

Und das ist im Bereich $0 \leq s \leq 1$ immer erfüllt, somit liegt SSD vor.

korrekte Aussage 1P

Aufgabe 5 (9 Punkte)

Einem Investor mit der Erwartungsnutzenfunktion $u(x) = -\sqrt{e^{-3x}}$ wird ein Wertpapier mit einer unsicheren Auszahlung $x > 0$ zum Kauf angeboten. Diese Zahlung besitzt den Erwartungswert E(x)=10 und die Varianz Var(x)=1,5.

a) Geben Sie die Näherungsformel zur Berechnung der Markowitz-Prämie an und nutzen Sie diese zur Berechnung der konkreten Markowitzprämie des Investors für das Wertpapier *(5 Punkte)*.

$$\pi \approx \frac{1}{2} Var(x) \cdot ARA(E(x)) \quad \text{mit } ARA(E(x)) = -\frac{u''(E(x))}{u'(E(x))}$$

Formel 2P

$$u(x) = -e^{-\frac{3}{2}x}$$

$$u'(x) = \frac{3}{2} e^{-\frac{3}{2}x}$$

u'(x) korrekt 1P

$$u''(x) = -\frac{9}{4} e^{-\frac{3}{2}x}$$

u''(x) korrekt* 1P

$$ARA(x) = -\frac{u''(x)}{u'(x)} = \frac{3}{2}$$

ARA(x) berechnet 0,5P

$$\text{Damit} \quad \pi \approx \frac{1}{2} \cdot \underbrace{\frac{3}{2}}_{Var(x)} \cdot \frac{3}{2} = \frac{9}{8} = 1{,}125$$

Ergebnis 0,5P

5P

*Folgefehler bei u''(x) werden als korrekt gewertet.

b) Welchen Preis ist der Investor maximal bereit, für das Wertpapier zu zahlen, wenn die unsichere Auszahlung x unmittelbar nach dem Kauf erfolgt (keine Verzinsung)? *Hinweis: Nutzen Sie zur Berechnung des Preises Ihr Ergebnis aus der ersten Teilaufgabe. Wenn Sie diese nicht lösen konnten, wählen Sie einen willkürlichen Wert (4 Punkte).*

Der Investor ist maximal bereit, einen Preis p in Höhe des Sicherheitsäquivalents x^* zu bezahlen.

(Ansatz allein 2P)

über den Zusammenhang $p = x^* = E(x) - \pi$

Formel (auch ohne explizit notierten Ansatz): 3P

erhält man

$$p = x^* = \underbrace{10}_{E(x)} - \frac{9}{8} = \frac{71}{8} = 8\tfrac{7}{8} = 8{,}875$$

Ergebnis 1P

4P

Aufgabe 6 (15 Punkte)

Ein Investor mit der Nutzenfunktion U(x) = E(x) - Var(x) und dem Budget p(X)=10 stellt in $t = 0$ sein Portfolio aus einem risikolosen Wertpapier Y^1 und zwei riskanten Wertpapieren Y^2, Y^3 mit den möglichen Rückflüssen

$$Y^2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad Y^3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

zusammen. Die drei Zustände in $t = 1$ besitzen jeweils die gleiche Eintrittswahrscheinlichkeit. Die Rendite des sicheren Wertpapiers liegt stets bei $r(Y^1) = 0$. Der Preis des zweiten Basistitels beträgt $p(Y^2) = 1$, der Preis des dritten Wertpapiers $p(Y^3) = p$.

a) Berechnen Sie die Erwartungswerte, Varianzen und Kovarianzen der Rückflüsse der Basistitel. Stellen Sie anschließend das Entscheidungsproblem des Investors (Nutzenmaximierung unter einer Nebenbedingung) dar *(7,5 Punkte)*.

$E(Y^1) = p(Y^1)$

$E(Y^2) = \frac{1}{3} 0 + \frac{1}{3} 1 + \frac{1}{3} 2 = 1$

$E(Y^3) = \frac{1}{3} 2 + \frac{1}{3} 0 + \frac{1}{3} 4 = 2$

So, oder konkrete Wert $p(Y^1)$ gewählt: 0,5P

je 0,5P → 1P

$Var(Y^2) = E[(Y^2)^2] - (E(Y^2))^2 = \frac{5}{3} - 1^2 = \frac{2}{3}$

$Var(Y^3) = \frac{20}{3} - 2^2 = \frac{8}{3}$

Formel $Var(Y) = E(Y^2) - (E(Y))^2$ 1P

Ergebnisse je 0,5P → 1P

$Cov(Y^2; Y^3) = E(Y^2 Y^3) - E(Y^2)E(Y^3) = \frac{8}{3} - 2 = \frac{2}{3}$

Formel Kovarianz und Ergebnis je 0,5P → 1P

$$U(X) = \underbrace{p(Y^1)x_1 + 1x_2 + 2x_3}_{E(Y^{PF})} - \underbrace{\left(\frac{2}{3}x_2^2 + \frac{8}{3}x_3^2 + 2 \cdot \frac{2}{3} x_2 x_3\right)}_{Var(Y^{PF}) = x_2^2 Var(Y^2) + x_3^2 Var(Y^3) + 2x_2x_3 Cov(Y^2; Y^3)}$$

Formel für die Portfolio-Varianz 1P

korrekte Gleichung (mit Zahlenwerten) 1P

Budgetrestriktion: $p(Y^1)x_1 + 1 x_2 + p x_3 = 10$ 1P

Erläuterungen: - Formeln müssen nicht explizit angegeben sein, es reicht, wenn aus der Rechnung die korrekte Formel erkennbar ist

- Für $p(Y^1)$ kann ein beliebiger Wert gewählt werden

- Folgefehler werden berücksichtigt. Wenn also bspw. mit einem fehlerhaften $E(Y^2)$ korrekt weitergerechnet wird, so gibt es keine weiteren Punktabzüge.

Zwei mögliche Lösungswege. Entweder Auflösen der Budgetrestriktion und Einsetzen in die Nutzenfunktion oder Lagrange. Hier erster Weg, zweiter Weg auf Schmierzettel (S. 10).

b) Berechnen Sie die Wertpapiermengen x_1, x_2, x_3 des nutzenmaximierenden Portfolios in Abhängigkeit vom Preis p des dritten Wertpapiers *(7,5 Punkte)*.

mit $p(Y^1) \overset{!}{=} 1$

BR: $x_1 = 10 - x_2 - px_3$

in $U(x) = (10 - x_2 - px_3) + x_2 + 2x_3 - \frac{2}{3}x_2^2 - \frac{8}{3}x_3^2 - \frac{4}{3}x_2x_3$

$= (2-p)x_3 - \frac{2}{3}x_2^2 - \frac{8}{3}x_3^2 - \frac{4}{3}x_2x_3$

$U(x)$ 1,5P

$\frac{\partial U(x)}{\partial x_2}, \frac{\partial U(x)}{\partial x_3}$ je 1P

3,5P

(I) $\frac{\partial U}{\partial x_2} = -\frac{4}{3}x_2 - \frac{4}{3}x_3 \overset{!}{=} 0$

$x_2 = -x_3$

(II) $\frac{\partial U}{\partial x_3} = (2-p) - \frac{16}{3}x_3 - \frac{4}{3}x_2 \overset{!}{=} 0$

(I) in (II) $(2-p) - \frac{16}{3}x_3 + \frac{4}{3}x_3 = 0$

$(2-p) = 4x_3$

$\underline{x_3 = \frac{1}{2} - \frac{1}{4}p}$

in (I) $\underline{x_2 = -\frac{1}{2} + \frac{1}{4}p}$

in BR: $x_1 = 10 + \frac{1}{2} - \frac{1}{4}p - (\frac{1}{2} - \frac{1}{4}p)p$

$\underline{x_1 = 10\frac{1}{2} - \frac{3}{4}p + \frac{1}{4}p^2}$

Rest insgesamt bewerten: Alle drei Ergebnisse korrekt: 4P

Fehler werden abgezogen:
Schwerer Fehler -2P
Einfache Rechen- und Vorzeichenfehler -1P

Anmerkungen
- Wenn $p(Y^1) \neq 1$ gewählt, so ist das korrekte Ergebnis für $x_1^* = \frac{x_1}{p(Y^1)}$, sonst ändert sich nichts an den Ergebnissen
- Folgefehler gehen (wenn mit Fehler korrekt weitergerechnet: kein weiterer Punktabzug)

6b) ~~Schmierzettel~~

Mit Lagrange (und $p(Y^1) \overset{!}{=} 1$)

$$\mathcal{L} = x_1 + x_2 + 2x_3 - \frac{2}{3}x_2^2 - \frac{8}{3}x_3^2 - \frac{4}{3}x_2x_3 - \lambda\,(x_1 + x_2 + p x_3 - 10)$$

$$\text{(I)}\quad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_1} = 1 - \lambda \overset{!}{=} 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda = 1$$

$$\text{(II)}\quad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_2} = 1 - \frac{4}{3}x_2 - \frac{4}{3}x_3 - \lambda \overset{!}{=} 0$$

$$\text{(III)}\quad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_3} = 2 - \frac{16}{3}x_3 - \frac{4}{3}x_2 - \lambda p \overset{!}{=} 0$$

$$\text{(IV)}\quad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda} = x_1 + x_2 + p x_3 - 10 \overset{!}{=} 0$$

je 1P → 3P

Rest negativ bewerten:
Alle drei Ergebnisse korrekt: 4,5P
Fehler werden davon abgezogen (s.u.)

(II) mit $\lambda = 1$: $\quad -\frac{4}{3}x_2 - \frac{4}{3}x_3 = 0$

$$x_2 = (-x_3)$$

(III) mit $\lambda = 1$: $\quad -\frac{4}{3}x_2 - \frac{16}{3}x_3 + (2-p) = 0$

(II) in (III) $\quad \frac{4}{3}x_3 - \frac{16}{3}x_3 + (2-p) = 0$

$$(2-p) = 4x_3$$

$$\underline{\frac{1}{2} - \frac{1}{4}p = x_3}$$

aus (II) $\quad \underline{-\frac{1}{2} + \frac{1}{4}p = x_2}$

in (IV) $\quad x_1 + \left(-\frac{1}{2} + \frac{1}{4}p\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{4}p\right)p = 10$

$$x_1 - \frac{1}{4}p^2 + \frac{3}{4}p - \frac{1}{2} = 10$$

$$\underline{x_1} = \underline{10\tfrac{1}{2} - \frac{3}{4}p + \frac{1}{4}p^2}$$

Anmerkungen für Benotung:
- Wenn $p(Y^1) \neq 1$ gewählt, so erhält man als Ergebnis $x_1^* = \frac{x_1}{p(Y^1)}$
- Folgefehler werden berücksichtigt (s. Teilaufgabe a))
- Bewertungsschema: schwerer Fehler −2P, Rechenfehler, Vorzeichenfehler −1P

Aufgabe 7 (15 Punkte)

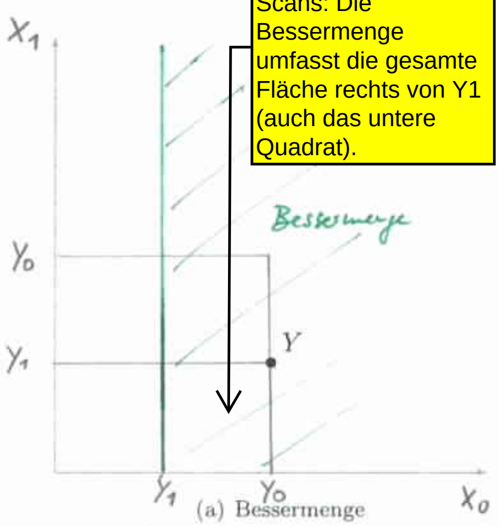
In Klausurversion B: X und Y exakt vertauscht.

Betrachten Sie Bündel aus jeweils zwei Gütern $X = (X_0, X_1)$, wobei einschränkend $X_0, X_1 \geq 0$ gilt, und folgende Präferenzrelation

$$X \succeq Y \quad :\Longleftrightarrow \quad X_0 \geq min(Y_0, Y_1).$$

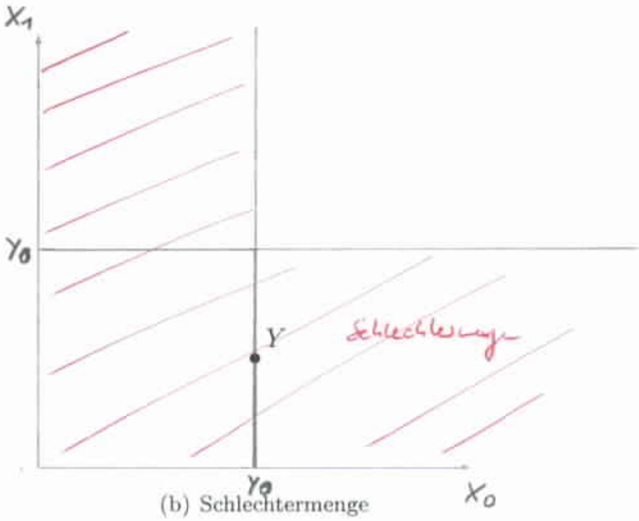
a) Skizzieren Sie (a) die Bessermenge und (b) die Schlechtermenge zum Güterbündel Y=(2,1) im jeweiligen unteren Koordinatensystem und beschriften Sie die Achsen. *Hinweis: Nutzen Sie ggf. den Raum unter den Koordinatensystemen für erste Versuche (5 Punkte).*

Anmerkung aufgrund des undeutlichen Scans: Die Bessermenge umfasst die gesamte Fläche rechts von Y1 (auch das untere Quadrat).



(a) Bessermenge

$min(Y_0, Y_1)$
$= Y_1$



(b) Schlechtermenge

Schlechtermenge $\quad Y \succeq X \Leftrightarrow Y_0 \geq min(X_0, X_1)$

Das Minimum von X_0, X_1 muss also kleiner als Y_0 sein.

Bepunktung: Achsenbeschriftung insgesamt 0,5P

Bessermenge korrekt eingezeichnet 2P

Schlechtermenge korrekt eingezeichnet 2,5P

Falls Bessermenge, Schlechtermenge falsch eingezeichnet:

- (Y_0, Y_0) oder (Y_1, Y_1) korrekt eingezeichnet insgesamt 1P
- Trennlinien für Besser-/Schlechtermenge erkennbar je 0,5P

b) Erklären Sie die Bedingungen der Vergleichbarkeit und der Transitivität in jeweils einem Satz. Prüfen und begründen Sie anschließend, ob diese Bedingungen bei der gegebenen Präferenzrelation erfüllt sind *(10 Punkte)*.

Vergleichbarkeit: Bed.: Es gilt $X \succsim Y$ oder $Y \succsim X$ für alle X, Y

Allg. Bedingung 1P

Eingesetzt 1P

Also $X_0 \geq \min(Y_0, Y_1) \vee Y_0 \geq \min(X_0, X_1)$

$\underline{X_0 \geq Y_0} \vee X_0 \geq Y_1 \vee \underline{Y_0 \geq X_0} \vee Y_0 \geq X_1$

Bereits die grün unterstrichenen Bedingungen sind immer erfüllt: $X_0 \geq Y_0$ oder $Y_0 \geq X_0$

Diese oder eine andere korrekte Begründung 2P

Vergleichbarkeit ist gegeben

4P

Transitivität:

Bed.: Wenn $X \succsim Y$ und $Y \succsim Z$, dann gilt auch $X \succsim Z$

Allg. Bedingung 1P

Also: $X_0 \geq \min(Y_0, Y_1) \wedge Y_0 \geq \min(Z_0, Z_1) \Rightarrow X_0 \geq \min(Z_0, Z_1)$

Eingesetzt 1P

Gegenbeispiel

$X = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \succsim Y = \begin{pmatrix} 10 \\ 0 \end{pmatrix} \wedge Y = \begin{pmatrix} 10 \\ 0 \end{pmatrix} \succsim Z = \begin{pmatrix} 5 \\ 5 \end{pmatrix}$

Da $X_0 = 1 \geq \min(\underset{Y_0}{10}, \underset{Y_1}{0})$ da $Y_1 = 10 \geq \min(5, 5)$

Gegenbeispiel gefunden* 4P

6P

Aber $X \not\succsim Z$, da $X_0 = 1 \not\geq \min(Z_0, Z_1) = 5$

Insgesamt 10P

* Auf richtigem Weg zum Gegenbeispiel / korrekte Begründung ggf. Punkte nach eigenem Ermessen und einheitlichem Schema