Übungsaufgaben zur Vorlesung »Entscheidungstheorie«

Univ.–Prof. Dr. Dr. Andreas Löffler

letzte Änderung am 29. August 2008

Beachten Sie bitte, dass nicht nur dieses Skript, sondern auch ein Reader mit zusätzlicher Literatur Grundlage der Vorlesung ist. Nähere Hinweise erhalten Sie auf dem Veranstaltungsplan, den Sie im Internet finden.

Universität Paderborn
Univ.–Prof. Dr. Dr. Andreas Löffler

AUFGABENSET 1:

Aufgabe 1 Betrachten Sie eine Situation, in der für drei zukünftigen Zeitpunkte jeweils Soll– und Habenzinssätze in Höhe von 10% sowie 5% vorliegen. Ein Investitionsprojekt hat weiter die (nachschüssige) Zahlungsreihe

Zeitpunkt	1	2	3
Cash–flow	40	50	60

Es ist in $t = 0$ eine Anschaffungsausgabe von 130 zu tätigen. Der Investor überlegt mit Hilfe eines vollständigen Finanzplanes, ob sie dieses Projekt durchführen sollte.

(a) Der Investor will die Investition vollständig eigenfinanzieren, sie besitzt also einen Kassenbestand in Höhe von 130. Führt die Investition zu einer Vermögensmehrung in $t = 3$?

(b) Der Investor will die Investition vollständig fremdfinanzieren, sie besitzt also einen Kassenbestand in Höhe von 0. Getilgt wird aus dem Cashflow des Projektes. Führt die Investition zu einer Vermögensmehrung in $t = 3$?

(c) Es scheint offensichtlich, dass bei einem Kassenbestand, der höher als 130 ist, die Investition ebenfalls zu einer Vermögensmehrung führen wird. Beweisen Sie diese Aussage.

Aufgabe 2 Betrachten Sie Güterbündel mit jeweils zwei Gütern $X = (X_0, X_1)$ und folgende Nutzenfunktion

$$U(X) = X_0 + X_1.$$

Prüfen Sie, ob die folgenden Nutzenfunktionen ebenfalls die gleiche Präferenz repräsentieren:

(a) $U^*(X) = X_0^3 + X_1^3 + 3X_0X_1^2 + 3X_0^2X_1$,

(b) $U^*(X) = \frac{e^{X_0}}{e^{-X_1}}$,

(c) $U^*(X) = (X_0 - 1)^2 + X_1^2$,

(d) $U^*(X) = \frac{1}{X_0} + \frac{1}{X_1}$,

(e) $U^*(X) = 100$,

(f) $U^*(X) = -\frac{1}{X_0+X_1}$.

AUFGABENSET 2:

Aufgabe 1 Betrachten Sie Güterbündel mit jeweils zwei Gütern $X = (X_0, X_1)$ (wobei einschränkend $X_0, X_1 \geq 0$ gilt) und folgende Präferenzrelation für diese Güterbündel

$$X \succeq Y :\iff X_0 - \frac{1}{1+X_1} \geq Y_0 - \frac{1}{1+Y_1}. \tag{1}$$

Prüfen Sie die Gültigkeit der Vergleichbarkeit und Transitivität und zeichnen Sie die Bessermenge. Existiert eine Nutzenfunktion für diese Präferenz?

Aufgabe 2 Betrachten Sie Güterbündel mit jeweils zwei Gütern $X = (X_0, X_1)$ (wobei einschränkend $X_0, X_1 > 0$ gilt) und folgende Präferenzrelation für diese Güterbündel

$$X \succeq Y :\iff \sqrt{\frac{X_0}{Y_0}} \geq \sqrt{\frac{Y_1}{X_1}}. \tag{2}$$

Prüfen Sie die Gültigkeit der Vergleichbarkeit und Transitivität und zeichnen Sie die Bessermenge. Existiert eine Nutzenfunktion für diese Präferenz?

Aufgabe 3 Betrachten Sie Güterbündel mit jeweils zwei Gütern $X = (X_0, X_1)$ und folgende Präferenzrelation für diese Güterbündel

$$X \succeq Y :\iff (X_0 \geq Y_0 \text{ und } X_1 \geq Y_1) \tag{3}$$

Prüfen Sie die Gültigkeit der Vergleichbarkeit und Transitivität und zeichnen Sie die Bessermenge. Existiert eine Nutzenfunktion für diese Präferenz?

Aufgabe 4 Betrachten Sie Güterbündel mit jeweils zwei Gütern $X = (X_0, X_1)$ und folgende Präferenzrelation für diese Güterbündel

$$X \succeq Y :\iff (X_0 \geq Y_0 \text{ oder } X_1 \geq Y_1) \tag{4}$$

Prüfen Sie die Gültigkeit der Vergleichbarkeit und Transitivität und zeichnen Sie die Bessermenge. Existiert eine Nutzenfunktion für diese Präferenz?

Aufgabe 5 Betrachten Sie Güterbündel mit jeweils zwei Gütern $X = (X_0, X_1)$ und folgende Präferenzrelation für diese Güterbündel

$$X \succeq Y :\iff (X_0 \geq Y_0 \text{ und } X_1 \geq Y_0) \text{ oder } (X_0 \geq Y_1 \text{ und } X_1 \geq Y_1) \tag{5}$$

Prüfen Sie die Gültigkeit der Vergleichbarkeit und Transitivität und zeichnen Sie die Bessermenge. Existiert eine Nutzenfunktion für diese Präferenz?

Hinweis: Sie sollten zuerst prüfen, ob Ihnen nicht eine Vereinfachung der rechten Seite mit Hilfe der Funktion Min *und* Max *gelingt.*

Aufgabe 6 Betrachten Sie die lexikographische Präferenz aus der Vorlesung für Güterbündel $X = (X_0, X_1)$. Im Skript waren die Gütermengen X_0 und X_1 beliebige reelle Zahlen. Jetzt sollen sie ausschließlich natürliche Zahlen sein: $X_0, X_1 \in \mathbf{N}$.

Zeigen Sie, dass dann die lexikographische Ordnung durch die folgende Nutzenfunktion repräsentiert werden kann:

$$X \succeq Y \iff X_0 + \frac{X_1}{1 + X_1} \geq Y_0 + \frac{Y_1}{1 + Y_1}.$$

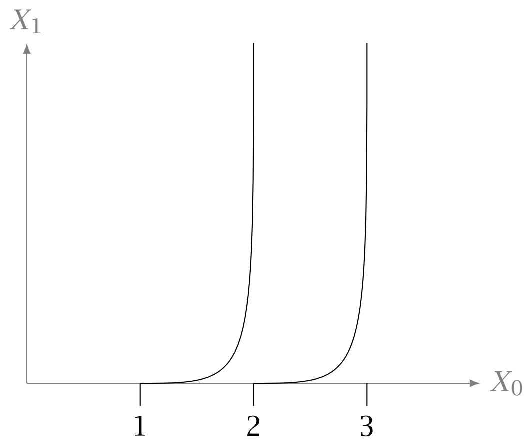

Abbildung 6: Indifferenzkurven der sechsten Aufgabe

Lösungsskizze zum Aufgabenset 3

Aufgabe 1 In Teilaufgabe a gilt

$$\mathrm{E}\,u(X) = \frac{1}{3}\ln(6.000) + \frac{1}{3}\ln(7.000) + \frac{1}{3}\ln(8.000) \approx 8,85$$

In Teilaufgabe b gilt

$$\mathrm{E}\,u(X) = \frac{1}{2001}\ln(6.000) + \frac{1}{2001}\ln(6.001) + \cdots + \frac{1}{2001}\ln(8.000) \approx 8,85$$

In Teilaufgabe c gilt

$$\begin{aligned}\mathrm{E}\,u(X) &= \int_{6.000}^{8.000} \ln(x)\frac{1}{8.000 - 6.000}dx \\ &= \frac{1}{2.000}\left[x\ln(x) - x\right]_{6.000}^{8.000} \\ &\approx 8,85\end{aligned}$$

In Teilaufgabe d gilt

$$\begin{aligned}\mathrm{E}\,u(X) &= \int_{6.000}^{9.000} \frac{1}{8.000 - 9.000}\sqrt{(x-6.500)^{+}}\,dx \\ &= \frac{1}{3.000}\int_{6.500}^{9.000}\sqrt{x-6.500}\,dx \\ &= \frac{1}{3.000}\left[\frac{2}{3}(x-6.500)^{\frac{3}{2}}\right]_{6.500}^{9.000} \\ &\approx 27,78\end{aligned}$$

Aufgabe 2 Für die erste Nutzenfunktion gilt

$$\mathrm{E}\,u(X) = -\frac{e^{-1}}{2} - \frac{e^{-2}}{4} - \frac{e^{-4}}{8} - \frac{e^{-8}}{8} \approx -0,22$$

Für die zweite Nutzenfunktion gilt

$$\mathrm{E}\,u(X) = \frac{\ln(1)}{2} + \frac{\ln(2)}{4} + \frac{\ln(4)}{8} + \frac{\ln(8)}{8} \approx 0,606$$

Für die dritte Nutzenfunktion gilt

$$\mathrm{E}\,u(X) = \frac{\sqrt{1}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{4} + \frac{\sqrt{4}}{8} + \frac{\sqrt{8}}{8} \approx 1,457$$

Um diejenige sichere Auszahlung, die zu einem identischen Nutzenniveau führt, zu ermitteln, haben wir folgende Gleichungen zu lösen: für die erste Nutzenfunktion

$$-0,22 = -e^{-x} \quad \Longrightarrow \quad x \approx 1,514.$$

Für die zweite Nutzenfunktion folgt

$$0,606 = \ln(x) \quad \Longrightarrow \quad x \approx 1,834.$$

Für die dritte Nutzenfunktion folgt

$$1,457 = \sqrt{x} \quad \Longrightarrow \quad x \approx 2,123.$$

Aufgabe 3 a) Für 100 Münzwürfe die Wahrscheinlichkeit einen Verlust zu erleiden ist $P(Y \leq 33)$, wobei Y die Gesamtanzahl für Kopf nach 100 Münzwürfe angibt. Da Y binomialverteilt ist, mit $n = 100$ und $p = 0,5$, beträgt die Wahrscheinlichkeit

$$P(Y \leq 33) = \sum_{k=0}^{33} \binom{100}{k} 0,5^k (1-0,5)^{100-k} = 0,000894965$$

Teil b) läuft so, dass man in die Ungleichung

$$\frac{1}{2}u(200+x) + \frac{1}{2}u(x-100) < u(x).$$

einmal $x = 200$ und einmal $x = -100$ einsetzt und dann beide Ungleichungen addiert. Dabei kommt folgendes heraus:

$$\frac{1}{4}(u(400) + 2u(100) + u(-200)) < \frac{1}{2}(u(200) + u(-100)) < u(0)$$

Das heißt aber: Zwei Würfe geben weniger Nutzen als ein Wurf. Diese Schlussweise führt man induktiv weiter und bekommt so das Ergebnis.

Aufgabe 4 Es gibt zwei Zustände: Fahrrad gestohlen oder Fahrrad nicht gestohlen. Die Wahrscheinlichkeiten sind 5% sowie 95%. Das Gesamtvermögen ohne Versicherung im Zustand eins ist 10.000, das Gesamtvermögen im Zustand zwei 11.000.

Der Erwartungsnutzen dieser Situation ist

$$\mathrm{E}\, u(X) = -0.05e^{-1} - 0.95e^{-\frac{11}{10}} \approx -0,3346.$$

Die Fahrradversicherung führt zu anderen Zahlungsströmen. Sei π die zu zahlende Prämie, dann haben wir als Nutzen sowie als Risikoprämie

$$\begin{aligned}
-0,3346 \approx \mathrm{E}\, u(X) &= -0.05e^{-\frac{11.000-\pi}{10.000}} - 0.95e^{-\frac{11.000-\pi}{10.000}} \\
&= -e^{-\frac{11.000-\pi}{10.000}} \\
-\ln(0,3346) &\approx \frac{11.000-\pi}{10.000} \\
\pi &\approx 11.000 + 10.000 \cdot \ln(0,3346) \approx 52,45
\end{aligned}$$

Mit einer anderen Wahrscheinlichkeit ν folgt

$$\begin{aligned}
-\nu e^{-1} - (1-\nu)e^{-\frac{11}{10}} &= -e^{-\frac{11.000-\pi}{10.000}} \\
\nu e^{\frac{1}{10}} + (1-\nu) &= e^{\frac{\pi}{10.000}} \\
10.000 \cdot \ln\left(1 + \nu\left(e^{\frac{1}{10}} - 1\right)\right) &= \pi
\end{aligned}$$

Die Grafik dieser Funktion ist in Abbildung 7 zu finden.

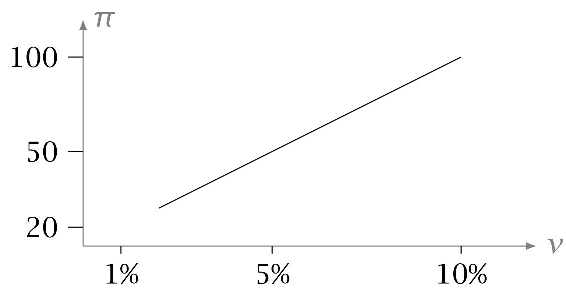

Abbildung 7: Versicherungspraemie

Aufgabe 5 Es gibt zwei Zustände: Fahrrad gestohlen oder Fahrrad nicht gestohlen. Die Wahrscheinlichkeiten sind v sowie $1-v$. Das Gesamtvermögen ohne Versicherung im Zustand eins ist 10.000, das Gesamtvermögen im Zustand zwei 11.000.

Der Erwartungsnutzen dieser Situation ist

$$\mathrm{E}\,u(X) = v\ln(10.000) + (1-v)\ln(11.000) = \ln(11.000) + v\ln(\frac{10}{11}).$$

Die Fahrradversicherung führt zu anderen Zahlungsströmen. Sei π die zu zahlende Prämie, dann haben wir als Nutzen

$$\ln(11.000) + v\ln(\frac{10}{11}) = \mathrm{E}\,u(X) = \ln(11.000-\pi)$$

Die Gleichung der Prämie in Abhängigkeit der Versicherung ist also

$$\pi = 11.000 - e^{\ln(11.000)+v\ln(\frac{10}{11})} = 11.000\left(1-\left(\frac{10}{11}\right)^{v}\right)$$

Die Grafik dieser Funktion ist in Abbildung 8 zu finden. Die Versicherungswerte sind denen der Aufgabe 3 sehr ähnlich und unterscheiden sich nur um Centbeträge.

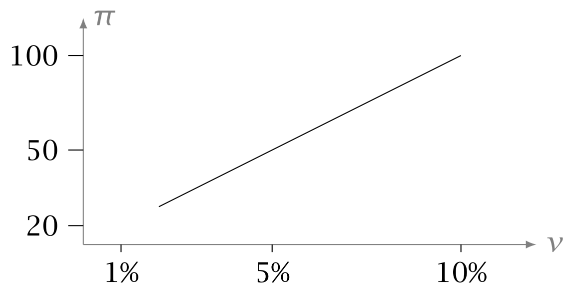

Abbildung 8: Versicherungspraemie

Aufgabe 6 Das folgt aus der Regel von l'Hospital (Zähler und Nenner nach a ableiten).

Der Grenzwert des Quotienten zweier differenzierbarer Funktionen im Punkt x_0 (kann auch $\pm\infty$ sein), in dem beide den Grenzwert Null haben (Typ $\frac{0}{0}$) oder beide gegen $\pm\infty$ divergieren (Typ $\frac{\infty}{\infty}$), ist gleich dem Grenzwert des Quotienten der Ableitungen im Punkt x_0, wenn dieser Grenzwert existiert:

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

Also

$$\begin{aligned}
\lim_{a \to 0} \frac{x^a - 1}{a} &= \lim_{a \to 0} \frac{(e^{a \ln x} - 1)'}{a'} \\
&= \lim_{a \to 0} \frac{\ln x \cdot e^{a \ln x}}{1} \\
&= \ln x
\end{aligned}$$

Lösungsskizze zum Aufgabenset 4

Aufgabe 1 Für den Erwartungsnutzen gilt

$$\mathrm{E}\,u(X) = \int_0^c \sqrt{x} f(x)dx = \frac{2}{3c}\left[x^{\frac{3}{2}}\right]_0^c = \frac{2}{3}\sqrt{c}$$

Für die Markowitz–Prämie müssen wir den Erwartungswert ermitteln. Er ist natürlich $\frac{c}{2}$:

$$\mathrm{E}[X] = \int_0^c \frac{1}{c} t dt = \frac{1}{c}\left[\frac{t^2}{2}\right]_0^c = \frac{1}{c}\frac{c^2}{2}$$

Somit ist die Gleichung

$$\begin{aligned} \mathrm{E}\,u(X) &= u(E[X] - \pi) \\ \frac{2}{3}\sqrt{c} &= \sqrt{\frac{c}{2} - \pi} \\ \frac{4}{9}c &= \frac{c}{2} - \pi \\ \pi &= \frac{c}{18} \end{aligned}$$

Um die Markowitz–Prämie nach der Approximationsformel zu bestimmen, berechnen wir die absolute Risikoaversion (CRRA-Funktion!)

$$-\frac{u''(x)}{u'(x)} = -\frac{-\frac{1}{4}x^{\frac{-3}{2}}}{\frac{1}{2}x^{\frac{-1}{2}}} = \frac{1}{2x}$$

Weiter benötigen wir die Varianz der Zufallsvariable

$$\mathrm{Var}[X] = \mathrm{E}[X^2] - \mathrm{E}[X]^2 = \int_0^c \frac{1}{c} t^2 dt - \frac{c^2}{4} = \frac{1}{c}\left[\frac{t^3}{3}\right]_0^c - \frac{c^2}{4} = \frac{c^2}{12}$$

und damit haben wir

$$\pi \approx \frac{1}{2}\mathrm{Var}[X]\left(-\frac{u''(\mathrm{E}[X])}{u'(\mathrm{E}[X])}\right) = \frac{1}{2}\frac{c^2}{12}\frac{1}{2\frac{c}{2}} = \frac{c}{24}$$

Aufgabe 2 Für den Erwartungsnutzen gilt

$$\mathrm{E}\,u(X) = \int_0^c -e^{-x} f(x)dx = \frac{1}{c}\left[e^{-x}\right]_0^c = \frac{1}{c}(e^{-c} - 1)$$

Für die Markowitz–Prämie müssen wir den Erwartungswert ermitteln. Er ist natürlich $\frac{c}{2}$ und somit ist die Gleichung

$$\begin{aligned} \mathrm{E}\,u(X) &= u(E[X] - \pi) \\ \frac{1}{c}(e^{-c} - 1) &= -e^{-\frac{c}{2}+\pi} \\ \pi &= \ln\left(\frac{e^{\frac{c}{2}} - e^{-\frac{c}{2}}}{c}\right) \end{aligned}$$

Der Grad der absoluten Risikoaversion ist (CARA-Funktion!)

$$-\frac{u''(x)}{u'(x)} = 1$$

und die Approximation liefert

$$\pi \approx \frac{1}{2}\mathrm{Var}[X]\left(-\frac{u''(\mathrm{E}[X])}{u'(\mathrm{E}[X])}\right) = \frac{1}{2}\frac{c^2}{12}1 = \frac{c^2}{24}$$

Aufgabe 3 Für den Erwartungsnutzen gilt

$$\mathrm{E}\,u(X) = \int_1^c -\frac{1}{x^2} f(x)dx = \frac{1}{c-1}\left[x^{-1}\right]_1^c = -\frac{1}{c}$$

Für die Markowitz–Prämie müssen wir den Erwartungswert ermitteln. Er ist jetzt $\frac{c+1}{2}$

$$\mathrm{E}[X] = \int_1^c \frac{1}{c-1} t\,dt = \frac{1}{c-1}\left[\frac{t^2}{2}\right]_1^c = \frac{1}{c-1}\left(\frac{c^2}{2} - \frac{1}{2}\right) = \frac{c+1}{2}$$

Somit ist die Gleichung

$$\begin{aligned} \mathrm{E}\,u(X) &= u(\mathrm{E}[X] - \pi) \\ -\frac{1}{c} &= -\frac{1}{(\frac{c+1}{2} - \pi)^2} \\ \pi &= \frac{c+1}{2} \pm \sqrt{c} \end{aligned}$$

Nur bei der Lösung $\pi = \frac{c+1}{2} - \sqrt{c}$ bleibt das Argument in $u(\mathrm{E}[X] - \pi)$ positiv.

Weiter benötigen wir die Varianz der Zufallsvariable

$$\begin{aligned}\operatorname{Var}[X] = \operatorname{E}[X^2] - \operatorname{E}[X]^2 = \int_1^c \frac{1}{c-1} t^2 dt - \frac{(c+1)^2}{4} = \\ = \frac{1}{c-1}\left[\frac{t^3}{3}\right]_1^c - \frac{(c+1)^2}{4} = \frac{(c-1)^2}{12}\end{aligned}$$

Der Grad der absoluten Risikoaversion ist (CRRA-Funktion!)

$$-\frac{u''(x)}{u'(x)} = -\frac{-6x^{-4}}{2x^{-3}} = \frac{3}{x}$$

und damit haben wir

$$\pi \approx \frac{1}{2}\operatorname{Var}[X]\left(-\frac{u''(\operatorname{E}[X])}{u'(\operatorname{E}[X])}\right) = \frac{1}{2}\frac{(c-1)^2}{12}\frac{3}{\frac{c+1}{2}} = \frac{1}{4}\frac{(c-1)^2}{c+1}$$

Lösungsskizze zum Aufgabenset 5

Aufgabe 1

$$\begin{aligned} Eu(x) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(x)(-ax^2 + bx)dx \\ &= -a\int_{-\infty}^{\infty} f(x)x^2 dx + b\int_{-\infty}^{\infty} f(x)x dx \\ &= -a(\mu^2 + \sigma^2) + b\mu \end{aligned}$$

Ein einfacherer Lösungsweg ist

$$\begin{aligned} Eu(x) &= E(-ax^2 + bx) \\ &= -aE(x^2) + bE(x) \\ &= -a(\mu^2 + \sigma^2) + b\mu \end{aligned}$$

Aufgabe 2 *a)* $ARA(x) = -\frac{1}{x-C}$ wachsend, $RRA(x) = -\frac{x}{x-C}$ wachsend

b) $ARA(x) = \frac{1}{x^2+x}$ fallend, $RRA(x) = \frac{1}{1+x}$ fallend

c) $ARA(x) = \frac{2x}{1+x^2}$ zuerst wachsend (bis $x = 1$), dann fallend, $RRA(x) = \frac{2x^2}{1+x^2}$ wachsend

d) $ARA(x) = \frac{1}{1+x}$ fallend, $RRA(x) = \frac{x}{1+x}$ wachsend

e) $ARA(x) = \frac{1}{2x+4x\sqrt{x}}$ fallend, $RRA(x) = \frac{1}{2+4\sqrt{x}}$ fallend

Aufgabe 3 Bei der Transformation ergibt sich

$$ARA^{\text{transf}}(x) = -\frac{(au(x)+b)''}{(au(x)+b)'} = -\frac{au''}{au'} = ARA(x)$$

Analog die relative Risikoaversion.

Lösungsskizze zum Aufgabenset 6

a) Die jeweiligen Verteilungsfunktionen sind in Abbildung 9 gezeichnet. Offensichtlich liegt FSD vor. Jeder Investor mit monoton wachsender Nutzenfunktion wird das Portfolio Y dem Portfolio X vorziehen.

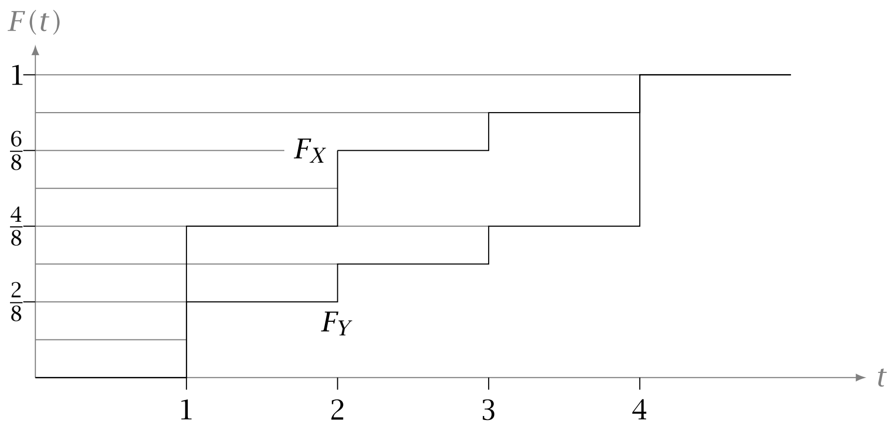

Abbildung 9: FSD und SSD

Wenn weiter die Verteilungsfunktion von Y immer unterhalb der Funktion von X verläuft, liegt demzufolge auch SSD vor. Jeder Investor mit monotoner und konkaver Nutzenfunktion zieht Y dem Portfolio X vor.

b) Die jeweiligen Verteilungsfunktionen sind in Abbildung 10 gezeichnet. Offensichtlich liegt keine FSD vor, da die weder die Verteilungsfunktion von X noch die von Y dominiert. Einige Investoren mit monotoner Nutzenfunktion werden das Portfolio X vorziehen, andere das Portfolio Y. Einheitliche Aussagen sind nicht möglich.

Es liegt auch keine SSD vor, wie wir gleich zeigen werden. Einige Investoren mit monotoner und konkaver Nutzenfunktion werden das Portfolio X vorziehen, andere das Portfolio Y. Einheitliche Aussagen sind nicht möglich.

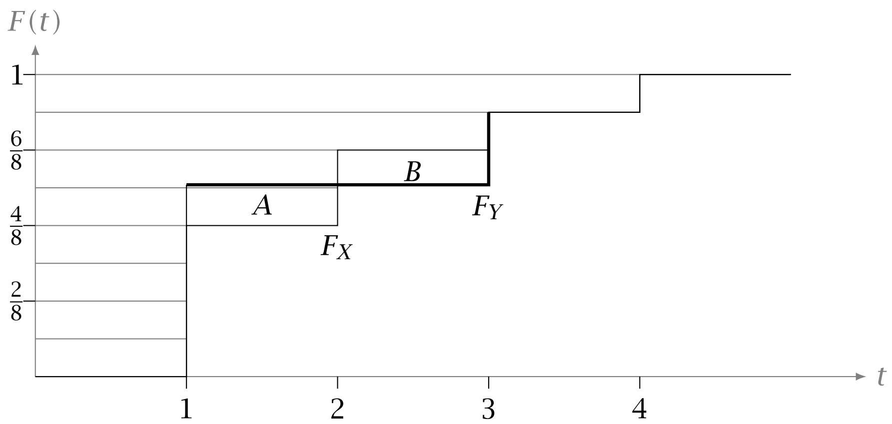

Abbildung 10: SSD (F_Y wurde der leichteren Lesbarkeit wegen teilweise dicker und versetzt gezeichnet)

Dazu betrachten wir $t*$ zwischen aus dem Intervall $[1,2]$. Wenn überhaupt eine Form der SSD vorliegt, müsste X dem Portfolio Y vorgezogen werden. Denn es gilt für diese $t*$

$$\int_{-\infty}^{t*} F_X(s)ds \leq \int_{-\infty}^{t*} F_Y(s)ds,$$

weil ja auf dem Intervall sogar $F_X \leq F_Y$ gilt. Betrachten wir nun einen Punkt $t* \in (3,4)$. Dort müsste jetzt auch diese Ungleichung gelten.

$$\int_{-\infty}^{t*} F_X(s)ds - \int_{-\infty}^{t*} F_Y(s)ds = \underbrace{\text{Inhalt(B)} - \text{Inhalt(A)}}_{=0} + \frac{1}{8} \cdot (t-3) > 0$$

und das Vorzeichen dieses hätte negativ sein müssen, falls SSD vorgelegen hätte.

c) *Intuition: Y zahlt höhere Beträge mit höherer Wahrscheinlichkeit. Daher erwarten wir FSD und SSD.*

Wenn X und Y gleichverteilt sind, dann bedeutet das für die Verteilungsfunktionen

$$F_X(t) = \int_0^t dt = t, \qquad 0 \leq t \leq 1$$

sowie

$$F_Y(t) = \int_{0.5}^t 2dt = 2(t-0.5), \qquad 0.5 \leq t \leq 1.$$

Die Verteilungsfunktionen sehen aus wie in Abbildung 11.

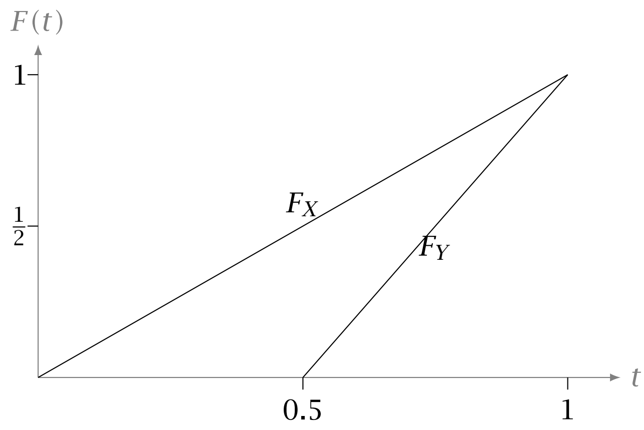

Abbildung 11: Verteilung bei Gleichverteilung

Offensichtlich liegt sowohl FSD als auch SSD vor.

d) *Intuition: Beide Zufallsvariablen haben gleichen Erwartungswert 0.5. Die Variable X bewegt sich von 0 bis 1, Y nur von 0.25 bis 0.75. Für einen risikoaversen Investor ist die Schwankung bei Y kleiner, also sollte es besser sein: Mithin erwarten wir SSD.*

Wenn X und Y gleichverteilt sind, dann bedeutet das für die Verteilungsfunktionen

$$F_X(t) = \int_0^t dt = t, \qquad 0 \le t \le 1$$

sowie

$$F_Y(t) = \int_{0.25}^t 2dt = 2(t - 0.25), \qquad 0.25 \le t \le 0.75.$$

Die Verteilungsfunktionen sehen aus wie in Abbildung 12.

Offensichtlich liegt FSD nicht mehr vor, da sich die Verteilungsfunktionen schneiden. Aber SSD ist gegeben.

Graphische Lösung Die Dreiecke A und B haben gleichen Inhalt. Es gilt für $t^* \le 0.5$ immer

$$\int_{-\infty}^{t^*} F_Y(s)ds \le \int_{-\infty}^{t^*} F_X(s)ds,$$

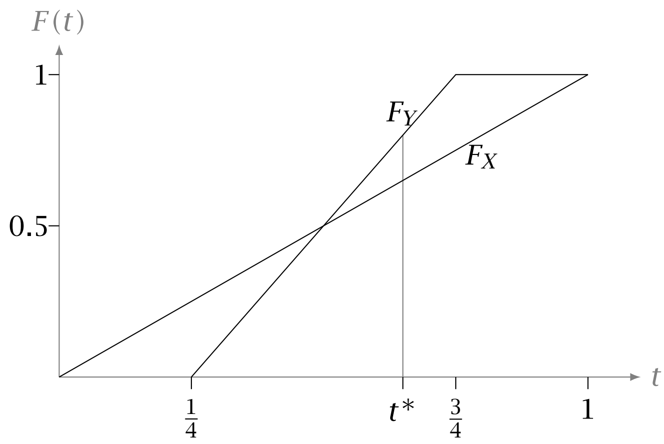

Abbildung 12: Verteilung bei Gleichverteilung

weil F_Y in diesem Intervall unterhalb verläuft. Wenn nun $t^* \geq 0.5$ gewählt wird, dann gilt

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{t^*} F_Y(s)ds - \int_{-\infty}^{t^*} F_X(s)ds &= \int_{-\infty}^{t^*} (F_Y(s) - F_X(s))ds \\ &\leq -\text{Inhalt (A)} + \int_{0.5}^{t^*} (F_Y(s) - F_X(s))ds \\ &= -\text{Inhalt (A)} + \text{Inhalt (B)} = 0\end{aligned}$$

und das war zu zeigen.

Numerische Lösung Dies kann man wie folgt zeigen: wir betrachten einen Punkt t^*. Wir haben nun vier Fälle zu unterscheiden. Beginnen wir mit dem **ersten Fall** $t^* \leq 0.25$

$$\int_0^{t^*} F_Y(t)dt = 0$$
$$\int_0^{t^*} F_X(t)dt \geq 0.$$

Für den **zweiten Fall** $t^* \leq 0.75$ haben wir

$$\begin{aligned}\int_0^{t^*} F_Y(t)dt = \int_{0.25}^{t^*} 2(t - 0.25)dt &= 2[\frac{1}{2}t^2 - 0.25t]_{0.25}^{t} \\ &= t^2 - (\frac{1}{4})^2 - \frac{1}{2}(t - \frac{1}{4})\end{aligned}$$

SSD liegt nun dann vor, wenn das obere Integral immer kleiner als das untere ist. Überprüfen wir das

$$\begin{aligned}(t^*)^2 - \frac{1}{2}t^* + \frac{1}{16} &\leq^? \frac{1}{2}(t^*)^2 \\ (t^*)^2 - t^* + \frac{1}{8} &\leq^? 0 \\ (t^* - \frac{1}{2})^2 &\leq^! \frac{1}{8} \qquad\qquad t \in [\frac{1}{4}, \frac{3}{4}]\end{aligned}$$

Jetzt haben wir die Gültigkeit der Beziehung für den **dritten Fall** $1 \geq t^* \geq 0.75$ zu überprüfen. Hier gilt nun

$$\begin{aligned}\int_0^{t^*} F_Y(t)dt &= \int_{0,25}^{0,75} 2(t - 0,25)dt + (t^* - 0,75) = t^* - 0.5 \\ \int_0^{t^*} F_X(t)dt &= \frac{1}{2}(t^*)^2\end{aligned}$$

Wieder ist der erste Term immer kleiner, denn es gilt

$$t^* - 0.5 - \frac{1}{2}(t^*)^2 = -\frac{1}{2}(t^* - 1)^2 \leq 0$$

Zuletzt prüfen wir den **vierten Fall** $t^* \geq 1$. Hier haben wir

$$\begin{aligned}\int_0^{t^*} F_Y(t)dt &= \frac{1}{4} + (t^* - 0.75) = t^* - 0.5 \\ \int_0^{t^*} F_X(t)dt &= \frac{1}{2} + (t^* - 1) = t^* - 0.5\end{aligned}$$

und es liegt in der Tat SSD vor!

Universität Paderborn
Univ.–Prof. Dr. Dr. Andreas Löffler

Lösungsskizze zum Aufgabenset 7

Aufgabe 1 Die Erwartungswerte sind

$$\mathrm{E}[X_1] = \frac{14}{3}, \quad \mathrm{E}[X_2] = \frac{17}{3}.$$

Die Kovarianzmatrix ist

$$\begin{pmatrix} 4.222 & -2.444 \\ -2.444 & 11.555 \end{pmatrix}$$

Die Determinante ist 42.8 und damit ist kein Titel redundant.

Wenn alle Titel eine erwartete Rendite von 10% besitzen, dann gilt

$$1.1 = \frac{\mathrm{E}[X^1]}{p(X^1)}, 1.1 = \frac{\mathrm{E}[X^2]}{p(X^2)}$$

und daraus können wir die Preise bestimmen

$$p(X^1) = 4.2424, \qquad p(X^2) = 5.1515$$

Aufgabe 2 Wir lösen

$$\begin{pmatrix} 15 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix} = x_0 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + x_1 \begin{pmatrix} 2 \\ 7 \\ 5 \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} 9 \\ 7 \\ 1 \end{pmatrix}$$

mit der Lösung (negative Einträge = Leerverkauf, erläutern)

$$x_0 = 7,4706 \quad x_1 = -1,5294 \quad x_2 = 1,1765.$$

Aufgabe 3 Nein, da die Determinante -0,006 beträgt.

Lösungsskizze zum Aufgabenset 8

Aufgabe 1 Jetzt ist die Determinante null, und damit ist ein Titel redundant. Der Nachbau gelingt wie folgt. Aus der Annahme

$$X_2 Y^2 + X_3 Y^3 = Y^4 \tag{6}$$

folgt

$$\begin{aligned} X_2 \operatorname{Cov}(Y^2, Y^2) + X_3 \operatorname{Cov}(Y^2, Y^3) &= \operatorname{Cov}(Y^2, Y^4) \\ X_2 \operatorname{Cov}(Y^3, Y^2) + X_3 \operatorname{Cov}(Y^3, Y^3) &= \operatorname{Cov}(Y^3, Y^4) \end{aligned}$$

Dies ist ein Gleichungssystem mit zwei Unbekannten, das sich lösen lässt. Die Lösung ist $X_2 = -2,7631$ und $X_3 = 4,3585$.

Aufgabe 2a Für den riskanten Titel gilt

$$\begin{aligned} \mathrm{E}[Y^1] &= 1, & \operatorname{Var}[Y^1] &= 0 \\ \mathrm{E}[Y^2] &= \frac{1}{2}, & \operatorname{Var}[Y^2] &= \frac{1}{4}. \end{aligned}$$

Aufgabe 2b Um zu prüfen, inwieweit das auf einen höheren Nutzen führt, rechnen wir einfach nach.

$$\begin{gathered} U(X) = \mathrm{E}[X] - \operatorname{Var}[X] <^? \mathrm{E}[X'] - \operatorname{Var}[X'] = U(X') \\ X_1 + \frac{X_2}{2} - \frac{X_2^2}{4} < X_1 + a + \frac{X_2}{2} - \frac{X_2^2}{4} \end{gathered}$$

X' wird immer dem X vorgezogen.

Aufgabe 2c In diesem Fall dagegen gilt

$$\begin{aligned} U(X) = X_1 + \frac{X_2}{2} - \frac{X_2^2}{4} &<^? X_1 + \frac{X_2 + a}{2} - \frac{(X_2 + a)^2}{4} = U(X'') \\ 0 &<^? \frac{a}{2} - \frac{2X_2 a + a^2}{4} \\ 0 &<^? \frac{1}{2} - \frac{X_2}{2} - \frac{a}{4} \\ X_2 &< 1 - \frac{a}{2} \end{aligned}$$

Wenn X_2 diese Bedingung erfüllt, dann wird X'' dem X vorgezogen. Sonst nicht.

Lösungsskizze zum Aufgabenset 9

Aufgabe 1a Wir errechnen

$$\mathrm{E}[X] = 2x + (1 - x) = 1 + x$$

und

$$\mathrm{Var}[X] = 0.5x^2 + 0.2x(1 - x) + 0.7(1 - x)^2 = x^2 - 1.2x + 0.7$$

Die letzte Gleichung stellen wir nach x um

$$0 = x^2 - 1.2x + 0.7 - \mathrm{Var}[X]$$
$$x_{1,2} = \frac{3}{5} \pm \sqrt{\frac{9}{25} - 0.7 + \mathrm{Var}[X]}$$

und setzen noch den Ausdruck $\mathrm{E}[X] - 1$ für x ein, dann erhalten wir

$$\mathrm{E}[X] = \frac{8}{5} \pm \sqrt{-0.34 + (\mathrm{Std}[X])^2}$$

die Grafik findet man in Abbildung 13. Die Grafik zeigt, dass durch die Kombination der beiden riskanten Titel ein Portfolio X entstehen kann, das weniger Risiko als die beiden Basistitel Y^2 und Y^3 aufweist. *Durch die Mischung der beiden Basistitel wird also Risiko vernichtet* oder »Don't put all your eggs in one basket.«

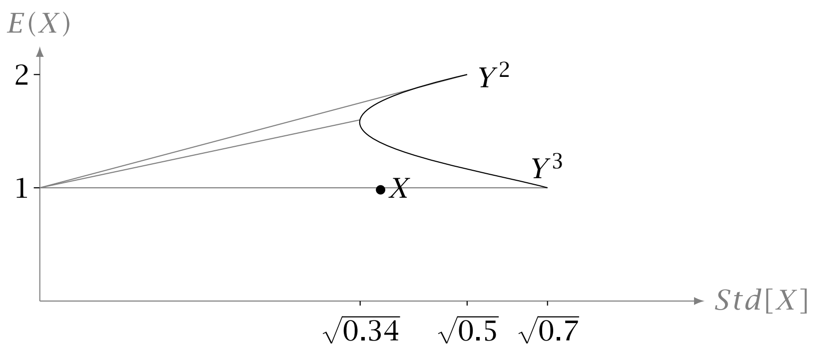

Abbildung 13: Aufgabenset 9, Aufgabe 1, σ-μ-Diagramm

Aufgabe 1b Wenn ein Portfolio X noch mit dem risikolosen Titel kombiniert werden kann, dann liegen diese Portfolios auf der grauen Linie zwischen X und der Ordinate. In der Zeichnung haben wir dies für dasjenige X eingezeichnet, das sich bei $x = 1$, $x = 0.5$ und $x = 0$ ergeben würde.

Aufgabe 1c Das Portfolio mit Erwartungswert 1 und Varianz 0.4 liegt offensichtlich derart, dass es von einem Portfolio auf der gezeichneten Kurve dominiert wird. Portfolios auf der Kurve haben beispielsweise gleiches Risiko (= gleiche Standardabweichung) aber höheren Ertrag (= höheren Erwartungswert).

Aufgabe 2 Das Maximierungsproblem lautet

$$\max_{p(X)=100} \mathrm{E}[X] - \frac{1}{2}\mathrm{Var}[X]$$

oder nach Einsetzen der Daten

$$\max_{X_1\cdot 1+X_2\cdot 0.6+X_3\cdot 0.6=100} X_1 + 2X_2 + X_3 - \frac{1}{2}\left(0.5X_2^2 + 0.2X_2X_3 + 0.7X_3^2\right).$$

LAGRANGE-ANSATZ Die Lagrange-Funktion ist

$$\mathcal{L} = X_1+2X_2+X_3-\frac{1}{2}\left(0.5X_2^2 + 0.2X_2X_3 + 0.7X_3^2\right)-\lambda(X_1\cdot 1+X_2\cdot 0.6+X_3\cdot 0.6-100)$$

und die ersten Ableitungen lauten

$$\begin{aligned}
0 &= \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial X_1} = 1 - \lambda \\
0 &= \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial X_2} = 2 - 0.5X_2 - 0.1X_3 - 0.6\lambda \\
0 &= \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial X_3} = 1 - 0.1X_2 - 0.7X_3 - 0.6\lambda \\
0 &= \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial \lambda} = X_1 + 0.6X_2 + 0.6X_3 - 100
\end{aligned}$$

Dieses Gleichungssystem hat die Lösung

$$X_1 = 98.235, \quad X_2 = 2.7647, \quad X_3 = 0.1765.$$

UMWANDLUNG IN EINFACHES MAXIMIERUNGSPROBLEM *Dieser Weg hat den Vorteil, dass die Maximierungsaufgabe vom Lagrangeproblem in eine ganz simple Maximierung (ohne Nebenbedingungen) umgewandelt wird.*

Wir formen die Nebenbedingung um und setzen sie in die Maximierung selbst ein

$$\max_{X_2,X_3}(100 - 0.6X_2 - 0.6X_3) + 2X_2 + X_3 - \frac{1}{2}\left(0.5X_2^2 + 0.2X_2X_3 + 0.7X_3^2\right).$$

Diese Maximierungsaufgabe lösen wir durch einfache Ableitungen nach X_2 und X_3

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{\partial}{\partial X_2} = -0.6 + 2 - 0.5X_2 - 0.1X_3 \\ 0 &= \frac{\partial}{\partial X_3} = -0.6 + 1 - 0.1X_2 - 0.7X_3 \end{aligned}$$

Dieses Gleichungssystem hat die Lösung

$$X_2 = 2.7647, \quad X_3 = 0.1765, \qquad \text{und} \quad X_1 = 98.235$$

Aufgabe 3 Wir folgen dem Lagrange–Lösungsweg

$$\mathcal{L} = 2X_2 + X_3 - \frac{1}{2}\left(0.5X_2^2 + 0.2X_2X_3 + 0.7X_3^2\right) - \lambda(X_2 \cdot 0.6 + X_3 \cdot 0.6 - 100)$$

Die partiellen Ableitungen ergeben

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial X_2} = 2 - 0.5X_2 - 0.1X_3 - 0.6\lambda \\ 0 &= \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial X_3} = 1 - 0.1X_2 - 0.7X_3 - 0.6\lambda \\ 0 &= \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda} = 0.6X_2 + 0.6X_3 - 100 \end{aligned}$$

Dies ist ein lineares Gleichungssystem in drei Unbekannten. Statt der üblichen Matrixlösung können wir hier etwas eleganter vorgehen: Subtrahieren wir die erste Gleichung von der zweiten, dann erhalten wir

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial X_3} = 1 - 0.4X_2 + 0.6X_3 \\ 0 &= \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda} = -100 + 0.6X_2 + 0.6X_3 \end{aligned}$$

Die Lösung ist

$$X_2 = 101, \quad X_3 = 65\frac{2}{3}$$

Der Erwartungswert dieses Portfolios ist ca. 267 $\frac{2}{3}$, die Varianz ca. 9445. Der Nutzen des Portfolios ist mit ca. -4455 negativ.

Die Alternative besteht aus dem Portfolio $X_2 \approx 2.765$ und $X_3 \approx 0.176$. Der Erwartungswert dieses Portfolios beträgt 5.71 und die Varianz ist 3.942. Damit ist der Nutzen mit etwa 3.74 positiv.

Anmerkung: Wegen der Nichtmonotonie der Nutzenfunktion gibt es hier einen Sättigungspunkt. Es ist besser, nichts zu tun. Der formale Fehler besteht darin, die Gültigkeit der Budgetgleichung

$$0.6X_2 + 0.6X_3 = 100$$

zu unterstellen. Besser wäre

$$0.6X_2 + 0.6X_3 \leq 100$$

und dann käme eine andere Lösung heraus. Dazu benötigt man die Kuhn-Tucker-Theorie, es ergibt sich dann ein optimales Portfolio $(X_2, X_3) \approx (3.82353, 0.8823)$ *mit dem Nutzen 4.26.*

Lösungsskizze zum Aufgabenset 10

Aufgabe 1 Es gilt

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial}{\partial X_2} \sum_{s=2}^{S} \sum_{r=2}^{S} X_s X_r \operatorname{Cov}(Y^s, Y^r) \\
&= \frac{\partial}{\partial X_2} \Big(X_2 X_2 \operatorname{Cov}(Y^2, Y^2) + X_2 X_3 \operatorname{Cov}(Y^2, Y^3) + X_3 X_2 \operatorname{Cov}(Y^3, Y^2) + X_3 X_3 \operatorname{Cov}(Y^3, Y^3) \Big) \\
&= 2X_2 \operatorname{Cov}(Y^2, Y^2) + X_3 \operatorname{Cov}(Y^2, Y^3) + X_3 \operatorname{Cov}(Y^3, Y^2) \\
&= 2 \sum_{r=2}^{3} X_r \operatorname{Cov}(Y^2, Y^r)
\end{aligned}$$

Aufgabe 2a Das Maximierungsproblem lautet

$$\max_{p(X)=100} \mathrm{E}[X] - \mathrm{Var}[X]$$

oder nach Einsetzen der Daten

$$\max_{X_1 \cdot 1 + X_2 \cdot 10 + X_3 \cdot 10 = 100} X_1 + 2X_2 + X_3 - 5X_2^2 - 2X_2 X_3 - 7X_3^2.$$

Jetzt gibt es wieder zwei mögliche Vorgehensweisen.

Lagrange–Ansatz Die Lagrange–Funktion ist

$$\mathcal{L} = X_1 + 2X_2 + X_3 - 5X_2^2 - 2X_2X_3 - 7X_3^2 - \lambda(X_1 + X_2 \cdot 10 + X_3 \cdot 10 - 100)$$

und die ersten Ableitungen lauten

$$\begin{aligned}
0 &= \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial X_1} = 1 - \lambda \\
0 &= \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial X_2} = 2 - 10X_2 - 2X_3 - \lambda 10 \\
0 &= \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial X_3} = 1 - 2X_2 - 14X_3 - \lambda 10 \\
0 &= \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda} = X_1 + 10X_2 + 10X_3 - 100
\end{aligned}$$

Setzen wir $\lambda = 1$ ein, dann erhalten wir

$$\begin{aligned} -8 &= 10X_2 + 2X_3 \\ -9 &= 2X_2 + 14X_3 \\ 0 &= X_1 + 10X_2 + 10X_3 - 100 \end{aligned}$$

Dieses Gleichungssystem hat die Lösung

$$X_1 = 112,353, \quad X_2 = -0,6912, \quad X_3 = -0,5441.$$

UMWANDLUNG IN EINFACHES MAXIMIERUNGSPROBLEM *Dieser Weg hat wieder den Vorteil, dass die Maximierungsaufgabe vom Lagrangeproblem in eine ganz simple Maximierung (ohne Nebenbedingungen) umgewandelt wird.*

Wir formen die Nebenbedingung um und setzen sie in die Maximierung selbst ein

$$\max_{X_2,X_3}(100 - 10X_2 - 10X_3) + 2X_2 + X_3 - \left(5X_2^2 + 2X_2X_3 + 7X_3^2\right).$$

Diese Maximierungsaufgabe lösen wir durch einfache Ableitungen nach X_2 und X_3

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{\partial}{\partial X_2} = -10 + 2 - 10X_2 - 2X_3 \\ 0 &= \frac{\partial}{\partial X_3} = -10 + 1 - 2X_2 - 14X_3 \end{aligned}$$

Dieses Gleichungssystem hat die Lösung

$$X_2 = -0,6912, \quad X_3 = -0,5441, \quad \text{und} \quad X_1 = 112,353.$$

Aufgabe 2b

$$
\begin{aligned}
\mathrm{E}[\tilde{r}_{PF}] &= \frac{112,353 \times 1 + (-0,6912) \times 2 + (-0,5441) \times 1}{112,353 \times 1 + (-0,6912) \times 10 + (-0,5441) \times 10} - 1 = 0,1043 \\
\mathrm{E}[\tilde{r}_{Y^1}] &= \frac{1}{1} - 1 = 0 \\
\mathrm{E}[\tilde{r}_{Y^2}] &= \frac{2}{10} - 1 = -0,8 \\
\mathrm{E}[\tilde{r}_{Y^3}] &= \frac{1}{10} - 1 = -0,9 \\
\omega_{Y^1} &= \frac{(112,353) \times 1}{100} = 1,12353 \\
\omega_{Y^2} &= \frac{(-0,6912) \times 10}{100} = -0,06912 \\
\omega_{Y^3} &= \frac{(-0,5441) \times 10}{100} = -0,05441
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&\omega_{Y^1} \cdot \mathrm{E}[\tilde{r}_{Y^1}] + \omega_{Y^2} \cdot \mathrm{E}[\tilde{r}_{Y^2}] + \omega_{Y^3} \cdot \mathrm{E}[\tilde{r}_{Y^3}] \\
=&1,12353 \times 0 + (-0,06912) \times (-0,8) + (-0,05441) \times (-0,9) \\
=&0,1043 = \mathrm{E}[\tilde{r}_{PF}]
\end{aligned}
$$

Aufgabe 3 Das Maximierungsproblem lautet

$$\max_{p(X)=100} \mathrm{E}[X] - \mathrm{Var}[X]$$

oder nach Einsetzen der Daten

$$\max_{X_1 \cdot 1 + X_2 \cdot p = 100} X_1 + 5X_2 - 10X_2^2.$$

Wir verfolgen nur den Lagrange–Ansatz und bilden die Lagrange–Funktion

$$\mathcal{L} = X_1 + 5X_2 - 10X_2^2 - \lambda(X_1 + p \cdot X_2 - 100)$$

und betrachten die Ableitungen

$$
\begin{aligned}
0 &= \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial X_1} = 1 - \lambda \\
0 &= \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial X_2} = 5 - 20X_2 - \lambda p \\
0 &= \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda} = X_1 + p \cdot X_2 - 100
\end{aligned}
$$

$\lambda = 1$ führt bei der zweiten Gleichung auf

$$X_2 = \frac{5-p}{20}, \qquad X_1 = 100 - \frac{p(5-p)}{20}.$$

Aufgabe 4 Das Maximierungsproblem lautet

$$\max_{p(X)=100} \mathrm{E}[X] - \sqrt{\mathrm{Var}[X]}$$

oder nach Einsetzen der Daten

$$\max_{X_1 \cdot 1 + X_2 \cdot 1 = 100} X_1 + 5X_2 - \sqrt{10X_2^2}.$$

Wir verfolgen nur den zweiten Ansatz und setzen die Budgetbedingung ein

$$\begin{aligned} \max \quad & 100 - X_2 + 5X_2 - \sqrt{10}|X_2| \\ \max \quad & 100 - X_2 + 5X_2 - \sqrt{10}X_2 \\ \max \quad & 100 + 0,83772234X_2. \end{aligned}$$

(Erläuterung von zweiten zur dritten Gleichung: wenn X_2 Maximallösung ist, dann kann X_2 nicht negativ sein. Also ist X_2 positiv und es gilt $X_2 = |X_2|$)

Diese Funktion hat keine Maximallösung, sondern ist vielmehr unbeschränkt. Man verschuldet sich endlos, um mehr Nutzen zu erzielen.

Konkret kauft man beispielsweise $x + 100$ Mengen Wertpapiere Y^2 und borgt sich x Titel Y^1. Die kostet insgesamt 100 Geldeinheiten, ist also finanzierbar. Der Nutzen aus dieser Transaktion ist

$$5x + 500 - x - \sqrt{10x^2} = 500 + 0,83772234x$$

und je höher x, umso höher der Nutzen.

Aufgabe 5 Man hat zwei Zustände mit den Zahlungen 32.000 und 1.000.000. Die sichere Zahlung ist 500.000.

a) Der Erwartungsnutzen ist

$$\mathrm{E}[u(X)] \approx 12,0945$$

und der Nutzen der sicheren Zahlung 13,1224. Man macht nicht weiter.

b) Im μ–σ–Fall hat man als Nutzen

$$U(X) = 516.000 - \ln(234.512.000.000) \approx 515.973$$

und das ist auf jeden Fall größer als 500.000. Hier macht man weiter.

c) Die Wahrscheinlichkeit der Antwort A wollen wir mit a bezeichnen, die Wahrscheinlichkeit von B ist dann $1 - a$.

Gleichstand herrscht im Erwartungsnutzenfall genau dann, wenn die Wahrscheinlichkeit für richtige Antwort entweder von A oder von B mindestens 79,86% ist:

$$(1-a)\ln(32.000) + a\ln(1.000.000) = \ln(500.000)$$

d) Gleichstand herrscht im Erwartungsnutzenfall genau dann, wenn die Wahrscheinlichkeit für richtige Antwort entweder von A oder von B mindestens 79,86% ist:

$$(1-a)\ln(V + 32.000) + a\ln(V + 1.000.000) = \ln(V + 500.000)$$

Dies ist eine Funktion von a in Abhängigkeit von V. Wir haben sie in Abbildung 14 dargestellt.

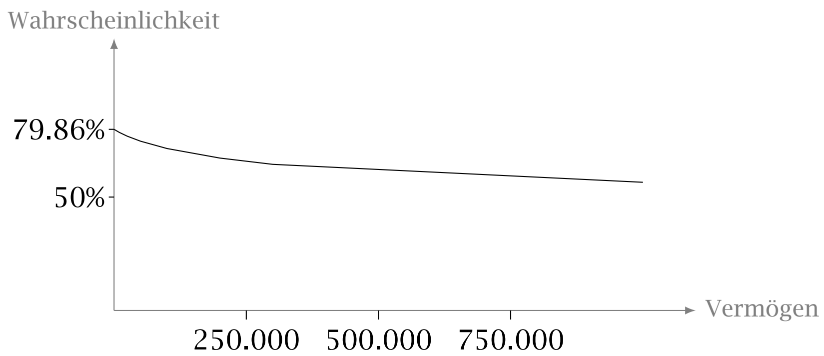

Abbildung 14: Aufgabe 5: Wer wird Millionär?

Lösungsskizze zum Aufgabenset 11

Aufgabe 1a Folgende Portfolios sind zu bilden:

Portfolio aus A und B

$$
\begin{aligned}
r_{AB} &= \omega \cdot r_A + (1-\omega)\cdot r_B \\
\min_{\omega} \operatorname{Var}[r_{AB}] \quad \text{bzw.} \quad \frac{\partial \operatorname{Var}[r_{AB}]}{\partial \omega} &= 0 \\
\operatorname{Var}[r_{AB}] &= \omega^2 \cdot \operatorname{Var}[\tilde r_A] + (1-\omega)^2 \cdot \operatorname{Var}[\tilde r_B] + 2\omega(1-\omega)\cdot \operatorname{Cov}[\tilde r_A, \tilde r_B] \\
\operatorname{Cov}[\tilde r_A, \tilde r_B] &= \varrho_{AB} \cdot \sqrt{\operatorname{Var}[\tilde r_A]\cdot \operatorname{Var}[\tilde r_B]} \\
&= (-0,5) \times \sqrt{0,01 \times 0,0625} = -0,0125 \\
\operatorname{Var}[r_{AB}] &= \omega^2 \cdot 0,01 + (1-\omega)^2 \cdot 0,0625 - 2\omega(1-\omega)\cdot 0,0125 \\
\frac{\partial \operatorname{Var}[r_{AB}]}{\partial \omega} &= 0,02\omega + 0,125(1-\omega)(-1) - 0,025 + 0,05\omega = 0 \\
&\rightarrow \quad \omega = 0,7692 \quad 1-\omega = 0,2308
\end{aligned}
$$

Portfolio aus B und C

$$
\begin{aligned}
\operatorname{Cov}[\tilde r_B, \tilde r_C] &= -0,6 \times 0,25 \times 0,4 = -0,06 \\
\operatorname{Var}[r_{BC}] &= \omega^2 \cdot 0,0625 + (1-\omega)^2 \cdot 0,16 - 2\omega \cdot (-0,06) - 2\omega^2 \cdot (-0,06) \\
\frac{\partial \operatorname{Var}[r_{BC}]}{\partial \omega} &= 0,125\omega + 0,32(1-\omega)(-1) - 0,12 + 0,24\omega = 0 \\
&\rightarrow \quad \omega = 0,6423 \quad 1-\omega = 0,3577
\end{aligned}
$$

Portfolio aus A und C

$$
\begin{aligned}
\operatorname{Cov}[\tilde r_A, \tilde r_C] &= 0 \\
\operatorname{Var}[r_{AC}] &= \omega^2 \cdot 0,01 + (1-\omega)^2 \cdot 0,16 \\
\frac{\partial \operatorname{Var}[r_{AC}]}{\partial \omega} &= 0,02\omega - 0,32(1-\omega) = 0 \\
&\rightarrow \quad \omega = 0,9412 \quad 1-\omega = 0,0588
\end{aligned}
$$

Aufgabe 1b

$$\begin{aligned}
r_{PF} &= \frac{1}{3} r_A + \frac{1}{3} r_B + \frac{1}{3} r_C \\
\mathrm{E}[\tilde{r}_{PF}] &= \frac{1}{3} \times 0,1 + \frac{1}{3} \times 0,15 + \frac{1}{3} \times 0,2 = 0,15 \\
\mathrm{Var}[\tilde{r}_{PF}] &= (\frac{1}{3})^2 \times 0,01 + (\frac{1}{3})^2 \times 0,0625 + (\frac{1}{3})^2 \times 0,16 + \\
&+ 2 \times \frac{1}{3} \times \frac{1}{3} \times (-0,0125) + \frac{2}{9} \times (-0,06) \\
&= 0,0097
\end{aligned}$$

Aufgabe 2a Zuerst muss die Rendite des ersten Titels im jeweiligen Zustand berechnet werden!

$$\mathrm{E}[\tilde{r}_1] = 0,06523, \quad \mathrm{E}[\tilde{r}_2] = 0,26848, \quad \mathrm{E}[\tilde{r}_3] = 0,05837$$

$$\mathrm{Var}[\tilde{r}_1] = 0,0302, \quad \mathrm{Var}[\tilde{r}_2] = 0,0334, \quad \mathrm{Var}[\tilde{r}_3] = 0,027$$

$$\sigma_{r_1} = 0,1739, \quad \sigma_{r_2} = 0,1826, \quad \sigma_{r_3} = 0,1644$$

$$\varrho_{r_1,r_2} = 1, \quad \rightarrow \mathrm{Cov}[\tilde{r}_1, \tilde{r}_2] = \sqrt{\mathrm{Var}[\tilde{r}_1]\,\mathrm{Var}[\tilde{r}_2]}$$

$$\varrho_{r_2,r_3} = -1 \quad \rightarrow \mathrm{Cov}[\tilde{r}_2, \tilde{r}_3] = -\sqrt{\mathrm{Var}[\tilde{r}_2]\,\mathrm{Var}[\tilde{r}_3]}$$

$$\begin{aligned}
r_{12} &= \omega \cdot r_1 + (1-\omega) \cdot r_2 \\
\mathrm{E}[\tilde{r}_{12}] &= \omega \cdot 0,06523 + (1-\omega) \cdot 0,26848 \\
\mathrm{Var}[\tilde{r}_{12}] &= \omega^2 \cdot \sigma_{r_1}^2 + (1-\omega)^2 \cdot \sigma_{r_2}^2 + 2\omega(1-\omega) \cdot \mathrm{Cov}[\tilde{r}_1, \tilde{r}_2] \\
&= \omega^2 \cdot \sigma_{r_1}^2 + (1-\omega)^2 \cdot \sigma_{r_2}^2 + 2\omega(1-\omega) \cdot \sqrt{\mathrm{Var}[\tilde{r}_1]\,\mathrm{Var}[\tilde{r}_2]} \\
&= (\omega \cdot \sigma_{r_1} + (1-\omega) \cdot \sigma_{r_2})^2 \\
\sigma_{r_{12}} &= \omega \cdot \sigma_{r_1} + (1-\omega) \cdot \sigma_{r_2} \quad \text{wegen} \quad 0 \leq \omega \leq 1 \\
&= \omega \cdot 0,1739 + (1-\omega) \cdot 0,1826 \\
&= 0,1826 - 0,0087\omega \\
\text{Für} \quad \omega &= 0, \quad \mu_{r_{12}} = 0,26848, \quad \sigma_{r_{12}} = 0,1826 \\
\text{Für} \quad \omega &= 1, \quad \mu_{r_{12}} = 0,06523, \quad \sigma_{r_{12}} = 0,1739
\end{aligned}$$

Aufgabe 2b

$$
\begin{aligned}
r_{23} &= \omega \cdot r_2 + (1-\omega) \cdot r_3 \\
\mathrm{E}[\tilde{r}_{23}] &= \omega \cdot 0,26848 + (1-\omega) \cdot 0,05837 \\
\mathrm{Var}[\tilde{r}_{23}] &= (\omega \cdot \sigma_{r_2} - (1-\omega) \cdot \sigma_{r_3})^2 \\
\sigma_{r_{23}} &= \pm(0,347\omega - 0,1644) \\
\min \sigma_{r_{23}} & \quad \rightarrow \omega = 0,4738 \quad (\sigma_{r_{23}} = 0) \\
\text{Für} \quad \omega &= 0,4738, \quad \mu_{r_{23}} = 0,1579, \quad \sigma_{r_{23}} = 0 \\
\text{Für} \quad \omega &= 0, \quad \mu_{r_{23}} = 0,05837, \quad \sigma_{r_{23}} = 0,1644 \\
\text{Für} \quad \omega &= 1, \quad \mu_{r_{23}} = 0,26848, \quad \sigma_{r_{23}} = 0,1826
\end{aligned}
$$