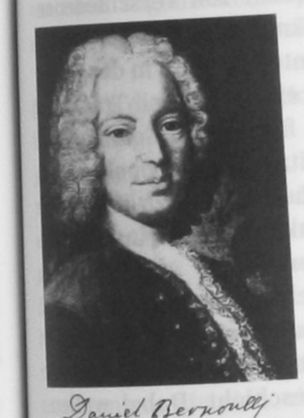
Daniel Bernoulli*

Entwurf einer neuen Theorie zur Bewertung von Lotterien

»Specimen theoriae novae de mensura sortis,« *Comentarii Academiae Scientiarum Imperialis Petropolitanae* 1738, S. 175–192.

*Aus dem Lateinischen übersetzt von Lutz Kruschwitz und Peter Kruschwitz***



Die Erwartungsnutzentheorie im Sinne von *von Neumann* und *Morgenstern* bildet einen elementaren Baustein neoklassischer Wirtschaftstheorie. Sie geht in ihrem Kern auf eine Idee zurück, die *Daniel Bernoulli* vor mehr als 250 Jahren in lateinischer Sprache veröffentlichte. Wer heute *Bernoulli* im Original studieren will, aber Latein nicht beherrscht, pflegt die englische Übersetzung zu Rate zu ziehen, welche 1954 in Econometrica erschien. Die nachfolgende deutsche Fassung bemüht sich, am Originaltext zu bleiben und trotzdem einen Sprachstil zu finden, der unseren gegenwärtigen Auffassungen entspricht.

* Daniel Bernoulli (Sohn des schweizerischen Mathematikers Johann Bernoulli), geboren am 29. Januar 1700 in Groningen, gestorben am 17. März 1782 in Basel, studierte Medizin und Mathematik, folgte 1725 einem Ruf auf eine Professur für Mathematik und Mechanik an der Akademie der Wissenschaften in Petersburg, wurde 1733 Professor der Anatomie und Botanik in Basel und 1750 Professor der Physik ebendort.

** Dr. Lutz Kruschwitz, Professor der Betriebswirtschaftslehre am Institut für Bank- und Finanzwirtschaft der Freien Universität Berlin, Boltzmannstr. 20, 14195 Berlin; Peter Kruschwitz, Student am Institut für Griechische und Lateinische Philologie der Freien Universität Berlin, Ehrenbergstr. 35, 14195 Berlin.

§ 1. Seitdem die Mathematiker damit begonnen haben, sich mit der Bewertung von Lotterien auseinanderzusetzen, waren sich alle in folgendem einig: *Man würde den Wert einer Lotterie dadurch erhalten, daß man die einzelnen Gewinnbeträge mit der Zahl der möglichen Fälle multipliziert und die Summe dieser Produkte anschließend durch die Zahl aller überhaupt möglichen Fälle dividiert. Dabei wird vorausgesetzt, daß jeder mögliche Fall gleich wahrscheinlich ist.* Folgt man dieser Regel, so muß man sich nur noch damit beschäftigen, alle denkbaren Gewinnbeträge aufzuzählen, sie anschließend in gleich wahrscheinliche Fälle zu zerlegen und in entsprechende Klassen einzuteilen.

§ 2. Wenn man die zahlreichen Veröffentlichungen zu diesem Thema genau prüft, so wird man feststellen, daß sich alle auf folgende Annahme stützen: *Man müsse zwei Lotterieteilnehmern gleiche Chancen einräumen, wenn es keinen Grund gibt, warum die eine Person größere Chancen hat als die andere.* Weiter wird man feststellen, daß in der Literatur solche Gründe überhaupt nicht untersucht werden, die die jeweiligen Vermögensverhältnisse der Personen betreffen, sondern daß ausschließlich diejenigen Umstände berücksichtigt werden, die zu den Lotteriebedingungen gehören.

Einem solchen Konzept mögen vielleicht die hohen Gerichte folgen. Hier geht es aber nicht darum, Gerichtsurteile zu fällen, sondern Ratschläge zu erteilen, gewissermaßen Handlungsempfehlungen, die jeder für sich selbst bei der Beurteilung von Lotterien unter Berücksichtigung seiner besonderen finanziellen Verhältnisse benutzen sollte.

§ 3. Um deutlich zu machen, daß das keine schlechte Empfehlung ist, betrachte man einen sehr armen Menschen, der durch irgendeinen Zufall in den Besitz eines Loses gekommen ist, mit welchem er bei gleicher Wahrscheinlichkeit entweder nichts oder 20000 Dukaten gewinnen wird. Sollte er diesem Lotterielos nun einen Wert von 10000 Dukaten beimessen, oder wäre er schlecht beraten, das Los für 9000 Dukaten zu verkaufen? Das scheint uns nicht der Fall zu sein, obwohl wir glauben, daß ein sehr reicher Mensch geradezu verrückt wäre, wenn er das Los nicht für 9000 Dukaten kaufen würde.

Wenn wir uns in dieser Sache nicht täuschen, kann man den Wert einer Lotterie offensichtlich nicht für alle Menschen mit dem gleichen Maßstab ermitteln, und infolgedessen müßte man die in § 1 dargestellte Regel eigentlich verwerfen. Jedoch wird man nach sorgfältiger Prüfung erkennen, daß der Begriff »Gewinnbetrag«, der in obiger Regel verwendet wird, auch so definiert werden kann, daß alles übrige für jeden ohne Bedenken akzeptabel ist: man darf freilich den Gewinn nicht nach seinem Geldbetrag, sondern muß ihn nach dem jeweiligen Nutzen bemessen, den jemand daraus zieht. Der Geldbetrag hängt von der Sache selbst ab und ist für alle derselbe; der Nutzen dagegen wird von den persönlichen Verhältnissen des einzelnen beeinflußt. So hat ein Gewinn von 1000 Dukaten für einen Armen zweifellos größeren Nutzen als für einen Reichen, obwohl der Geldbetrag für beide gleich ist.

§ 4. Damit haben wir unsere Angelegenheit schon so weit vorangetrieben, daß sich jeder durch die Abwandlung eines einzigen Begriffs selbst weiterhelfen könnte. Da die Theorie aber neu ist, bedarf sie noch einer gewissen Erläuterung. Aus diesem Grunde haben wir uns entschlossen, skizzenhaft darzustellen, wie wir uns die Sache zurecht gelegt haben. Inzwischen wollen wir folgendes als Grundregel benutzen: *Wenn man den Nutzen der einzelnen Gewinnbeträge mit der Zahl der möglichen Fälle multipliziert und die Summe dieser Produkte anschließend durch die Zahl aller überhaupt möglichen Fälle dividiert, erhält man den erwarteten Nutzen. Und der diesem Erwartungsnutzen entsprechende Gewinn stellt den Wert der Lotterie dar.*

§ 5. Tatsächlich wird auf diese Weise klar, daß man eine Lotterie nicht beurteilen kann, wenn man dabei nicht den Nutzen betrachtet, den jemand von einem bestimmten Gewinn hat, beziehungsweise umgekehrt, wie groß der Gewinn sein muß, damit ein bestimmter Nutzen daraus erwächst. Darüber kann man kaum etwas sicheres sagen, zumal der Zusammenhang zwischen Gewinn und Nutzen von verschiedenen Begleitumständen abhängt. Zwar zieht ein Armer aus einem bestimmten Gewinn in der Regel höheren Nutzen als ein Reicher. Trotzdem könnte beispielsweise für einen Gefangenen, der 2000 Dukaten besitzt, aber doppelt soviel braucht, um seine Freiheit wieder zu erlangen, ein Gewinn von 2000 Dukaten mehr Nutzen stiften als für einen ärmeren.

Obwohl man sich solche Beispiele noch endlos weiter ausdenken könnte, sind sie doch sehr selten. Also werden wir untersuchen, was unter normalen Umständen geschieht. Dabei wollen wir des besseren Verständnisses wegen davon ausgehen, daß das Vermögen eines Menschen immer nur mit verschwindend kleiner Wachstumsrate größer wird. Dann aber ist es äußerst wahrscheinlich, ***daß ein kleiner Gewinn einen Nutzen stiftet, der umgekehrt proportional zum schon vorhandenen Vermögen ist.***

Zur Veranschaulichung dieser Hypothese will ich zunächst erläutern, was ich hier unter dem bereits vorhandenen Vermögen verstehe, nämlich alle Dinge, die dazu geeignet sind, einen Menschen zu ernähren, zu kleiden, in Wohlstand oder sogar Luxus zu leben und zur Befriedigung überhaupt aller Bedürfnisse beizutragen. In diesem Sinne kann man von niemandem sagen, daß er nichts besitzt, es sei denn, er ist dem Hungertode nahe. Ferner kann man sagen, daß für die große Masse der wesentliche Teil ihres Vermögens aus ihrer Arbeitskraft besteht, welche auch die Fähigkeit zu betteln umfaßt. Jemand, der sich jährlich 10 Goldstücke erbettelt, dürfte wohl kaum 50 Goldstücke unter der Bedingung annehmen, nie mehr zu betteln oder sonst erwerbstätig zu sein, und damit

akzeptieren, daß er keine Zukunft hat, wenn das Geld ausgegeben ist. Ja selbst wenn jemand nichts als Schulden hat, so bezweifle ich, daß er zu dieser Bedingung bereit wäre, sich von seinen Schulden befreien zu lassen und dazu noch ein reichlich bemessenes Geldgeschenk anzunehmen. Wenn aber der Bettler den Vertrag nicht eingehen will, falls man ihm nicht mindestens 100 Goldstücke zahlt, und jener Schuldner nur dann, falls er 1000 Goldstücke bekommt, so werden wir sagen, daß der erste ein Vermögen von 100 Goldstücken und der zweite eines von 1000 Goldstücken besitzt, obwohl jener nach allgemeinem Sprachgebrauch nichts und der andere noch weniger als nichts hat.

§ 6. Nach dieser Definition komme ich auf die Feststellung zurück, die ich im vorigen Paragraphen getroffen habe, *nämlich daß der Nutzenzuwachs aufgrund eines kleinen Gewinnes unter gewöhnlichen Umständen umgekehrt proportional zum bereits vorhandenen Vermögen ist.* Betrachtet man die menschliche Natur genauer, so zeigt sich, daß dieser Satz auf die meisten Leute angewandt werden kann. Es gibt nur wenige, die sich nicht ordentlich um alle ihre jährlichen Einkünfte kümmern. Nehmen wir an, jemand besitzt ein Vermögen von 100000 Dukaten, während ein anderer über ebenso viele halbe Dukaten verfügt. Nehmen wir ferner an, daß der erste jährliche Einkünfte von 5000 Dukaten erzielt und der zweite von ebenso vielen halben Dukaten, so ist in jeder Hinsicht klar, daß für den ersten ein ganzer Dukaten das ist, was für den anderen ein halber Dukaten ist, und daß folglich für den ersten der Gewinn eines ganzen Dukaten nicht mehr Wert hat als der Gewinn eines halben Dukaten für den zweiten. Entsprechend gilt: wenn beide einen Gewinn von einem Dukaten machen, so zieht der zweite den doppelten Nutzen daraus, weil er um zwei halbe Dukaten reicher wird. Da dieses Beispiel stellvertretend für alle anderen ist, glaube ich, daß weitere Beispiele überflüssig sind.

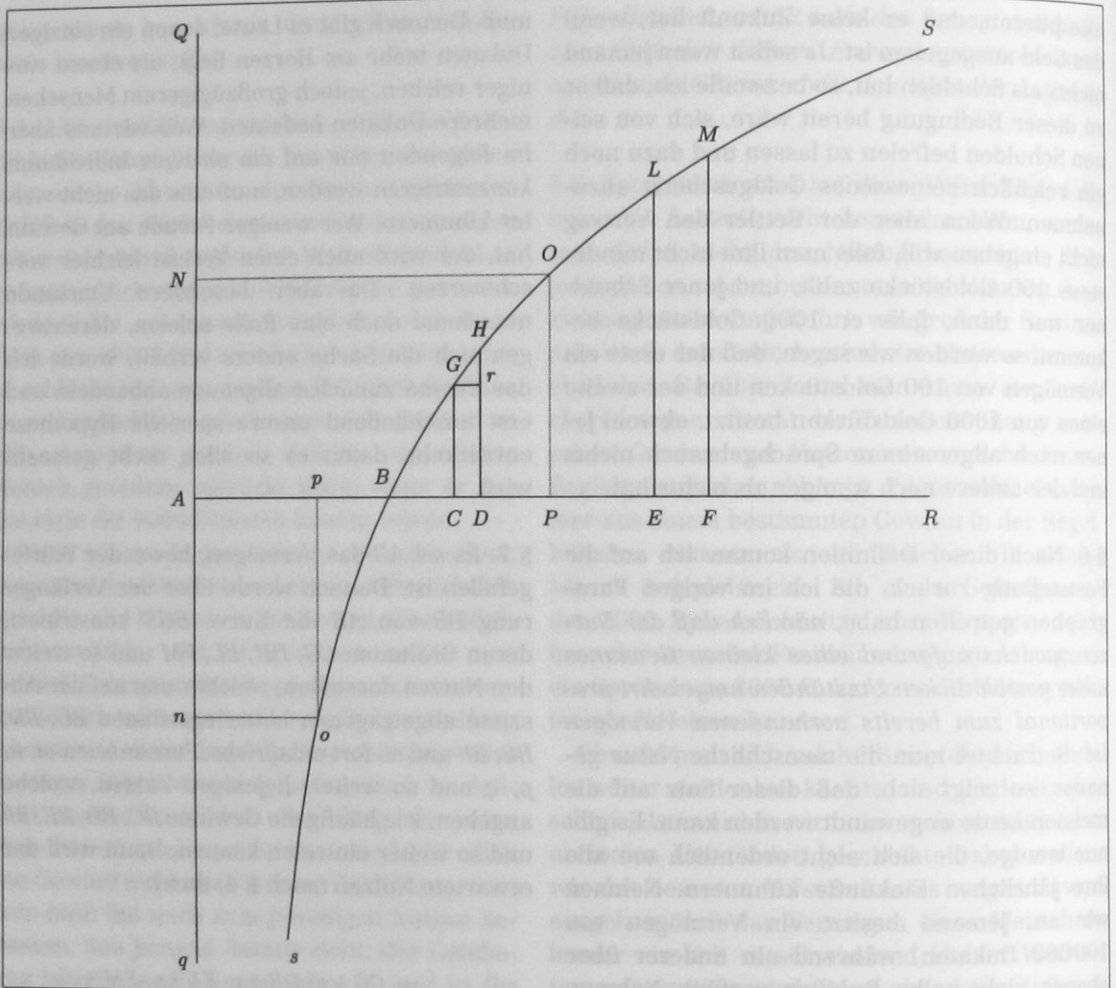
Unsere Feststellung ist vor allem auch deswegen richtig, weil der größte Teil der Menschheit im wesentlichen kein anderes Vermögen als die Arbeitskraft besitzt, von der allein der Lebensunterhalt auf Dauer bestritten werden muß. Dennoch gibt es Leute, denen ein einziger Dukaten mehr am Herzen liegt, als einem weniger reichen, jedoch großzügigerem Menschen mehrere Dukaten bedeuten. Weil wir uns aber im folgenden nur auf ein einziges Individuum konzentrieren werden, muß uns das nicht weiter kümmern. Wer weniger Freude am Gewinn hat, der wird auch einen Verlust leichter verschmerzen. Da aber besondere Umstände manchmal doch eine Rolle spielen, derentwegen sich die Sache anders verhält, werde ich das Thema zunächst allgemein abhandeln und erst anschließend unsere spezielle Hypothese entwickeln, damit es so allen recht gemacht wird.

§ 7. Es sei AB das Vermögen, bevor der Würfel gefallen ist. Danach werde über der Verlängerung BR von AB die Kurve BGS konstruiert, deren Ordinaten CG, DH, EL, FM und so weiter den Nutzen darstellen, welcher den auf der Abszisse abgetragenen Lotteriegewinnen BC, BD, BE, BF und so fort entspricht. Ferner seien m, n, p, q und so weiter diejenigen Zahlen, welche angeben, wie häufig die Gewinne BC, BD, BE, BF und so weiter eintreten können. Dann wird der erwartete Nutzen (nach § 4) durch

$$PO = \frac{m \cdot CG + n \cdot DH + p \cdot EL + q \cdot FM + \ldots}{m + n + p + q + \ldots}$$

dargestellt. Errichtet man nun AQ senkrecht auf AR und trägt darauf die Strecke $AN = PO$ ab, so repräsentiert die Strecke $NO - AB = BP$ den *dem Erwartungsnutzen entsprechenden* Gewinn oder den Wert der fraglichen Lotterie.

Wollen wir nun ferner wissen, wie groß der Einsatz ist, den jemand riskieren sollte, um diese Lotterie zu erwerben, so muß man die Kurve in die andere Richtung verlängern, und zwar dergestalt, daß jetzt die Abszisse Bp immer einen Verlust repräsentiert und die Ordinate po die dementsprechende Nutzeneinbuße wiedergibt. Da bei einem fairen Spiel die Nutzeneinbuße aus einem Verlust ebenso groß wie der Nutzenzuwachs aus einem Gewinn sein muß, haben wir anzunehmen, daß $An = AN$ oder $po = PO$ ist. Daher erweist sich Bp als der Einsatz, den jemand, der sein Vermögen klug



verwaltet, höchstens für die fragliche Lotterie wagen sollte.

§ 8. Folgerung 1: Bis jetzt haben die Gelehrten gewöhnlich mit einer Hypothese gearbeitet, die auf der Annahme beruht, daß jeder Gewinn nur nach sich selbst zu beurteilen sei und daß er stets einen Nutzen besitzt, der sich direkt proportional zu diesem Gewinn verhält. Unter dieser Voraussetzung wird die Kurve *BS* zu einer Geraden. Daraus folgt: Wenn wir wieder von

$$PO = \frac{m \cdot CG + n \cdot DH + p \cdot EL + q \cdot FM + \ldots}{m + n + p + q + \ldots}$$

ausgehen, so muß

$$BP = \frac{m \cdot BC + n \cdot BD + p \cdot BE + q \cdot BF + \ldots}{m + n + p + q + \ldots}$$

gelten, sobald man auf beiden Seiten die entsprechenden proportionalen Größen einsetzt. Das aber entspricht der traditionellen Regel.

§ 9. Folgerung 2: Wenn *AB* im Verhältnis zum maximal möglichen Gewinn *BF* unendlich groß wird, so muß man den Bogen *BM* als verschwindend kleine gerade Linie betrachten. Auch in diesem Fall erweist sich die traditionelle Regel als anwendbar. Sie gilt also näherungsweise bei allen Lotterien, in denen es nur um bescheidene Beträge geht.

§ 10. Nach dieser allgemeinen Untersuchung wenden wir uns jetzt jener oben erwähnten besonderen Hypothese zu, welche in der Tat vor allem anderen Beachtung verdient. Zunächst muß man unter Beibehaltung der in § 7 entwickelten Positionen die Eigenschaften der

Kurve *sBS* klären. Da voraussetzungsgemäß infinitesimal kleine Gewinne zu betrachten sind, gehen wir davon aus, daß *BC* und *BD* annähernd gleich groß sind, daß also die Differenz *CD* verschwindend klein ist. Wenn wir *Gr* parallel zu *BR* zeichnen, dann ist *rH* der Grenznutzen eines Individuums mit dem Vermögen *AC* aufgrund eines marginalen Gewinns in Höhe von *CD*. Dieser Nutzen jedoch darf nicht nur nach dem Grenzgewinn *CD* beurteilt werden, zu dem er sich ceteris paribus proportional verhält, sondern er muß auch in Beziehung zu *AC*, dem Ausgangsvermögen, gesehen werden, zu welchem er sich umgekehrt proportional verhält. Setzen wir also $AC = x$, $CD = dx$, $CG = y$, $rH = dy$ und $AB = \alpha$ und bezeichnen wir mit b eine gewisse Konstante, so erhalten wir

$$dy = b\,\frac{1}{x}\,dx$$

oder

$$y = b \ln \frac{x}{\alpha}$$

Daher ist die Kurve *sBS* eine Logarithmusfunktion[1], deren Subtangente[2] überall gleich b ist und deren Asymptote die Gerade *Qq* ist.

§ 11. Vergleicht man das mit unseren Ausführungen in § 7, so ist offenbar $PO = b \ln \frac{AP}{AB}$, $CG = b \ln \frac{AC}{AB}$, $DH = b \ln \frac{AD}{AB}$ und so weiter. Weil nun

$$PO = \frac{m \cdot CG + n \cdot DH + p \cdot EL + q \cdot FM + \ldots}{m + n + p + q + \ldots}$$

war, folgt

$$b \ln \frac{AP}{AB} = \frac{m \cdot b \ln \frac{AC}{AB} + n \cdot b \ln \frac{AD}{AB} + p \cdot b \ln \frac{AE}{AB} + q \cdot b \ln \frac{AF}{AB} + \ldots}{m + n + p + q + \ldots}$$

und daher

$$AP = (AC^m \cdot AD^n \cdot AE^p \cdot AF^q \cdot \ldots)^{1/(m+n+p+q+\ldots)}.$$

Zieht man davon noch *AB* ab, so repräsentiert die verbleibende Größe *BP* den Wert der fraglichen Lotterie.

§ 12. Der vorige Paragraph liefert die folgende Regel: *Man addiere zu den einzelnen Gewinnbeträgen das ursprüngliche Vermögen und potenziere die Summen mit der Zahl der jeweils möglichen Fälle. Anschließend multipliziere man diese Terme miteinander und ziehe aus dem Produkt (der Kurven)*[3] *diejenige Wurzel, deren Grad der Summe aller überhaupt möglichen Fälle ist. Subtrahiert man hiervon schließlich das ursprüngliche Vermögen, so entspricht der Rest dem Wert der fraglichen Lotterie.* Dieser Satz ist für die Bewertung von Lotterien in den unterschiedlichsten Situationen grundlegend. Darauf würde ich jetzt ein vollständiges Theoriegebäude errichten, wie das auch bei der traditionellen Bewertungsregel geschehen ist, was sowohl hinsichtlich seiner Nützlichkeit als auch wegen seiner Neuheit notwendig wäre, wenn es mir meine anderen bereits begonnenen Arbeiten gestatten würden. Daher will ich hier nur von den erwähnenswerteren Dinge berichten, die mir beim ersten Nachdenken klar geworden sind.

§ 13. Vor allem ergibt sich: Jeder der beiden Teilnehmer an einem Glücksspiel erleidet selbst dann Nutzeneinbußen, wenn man die Spielbedingungen noch so fair macht – gewiß ein deutlicher Wink der Natur, die Finger vom Glücksspiel zu lassen. Das folgt aus der Konkavität der Kurve *sBS* (gegen *BR*). Wenn man also den Betrag *Bp* einsetzt und dieser ebenso groß wie der erwartete Gewinn *BP* ist, dann ist die Nutzeneinbuße *po*, welche bei negativem Ausgang folgt, immer größer als der erwartete Nutzenzuwachs *PO*. Obwohl das einem Mathematiker ohne weiteres einleuchtet, will ich es mit einem Beispiel verdeutlichen, damit es von allen verstanden wird. Man betrachte zwei Spieler, von denen jeder ein Vermögen von 100 Dukaten besitzt und die Hälfte davon in einem Spiel mit für beide Parteien gleichen Chancen einsetzt. Unter diesen Voraussetzungen hat jeder 50 Dukaten und dazu noch die Hoffnung, 100 Dukaten zu gewinnen. Die Summe aus beidem entspricht nach der in § 12 angegebenen Regel $(50^1 \cdot 150^1)^{1/2}$ oder $\sqrt{50 \cdot 150}$, das heißt weniger als 87 Dukaten, so daß beide aus dem Spiel eine Nutzeneinbuße von mehr als 13 Dukaten erleiden, obwohl die Bedingungen absolut fair sind. Obwohl es von selbst einleuchtet, wollen wir die folgende Wahrheit noch besonders betonen: Die Dummheit eines Spielers ist natürlich um so größer, je größer der Teil des Vermögens ist, den er beim Spiel riskiert. Zu diesem Zweck untersuchen wir dasselbe Beispiel, nur mit dem Unterschied, daß ein Spieler vor dem Einsatz ein Ausgangsvermögen von 250 Dukaten hat. Dieser wird dann einen Verlust in Höhe von $200 - \sqrt{150 \cdot 250}$ machen, also etwas mehr als 6 Dukaten.

§ 14. Wenn also jemand unvernünftig handelt, der auch nur den geringsten Teil seines Vermögens bei einem fairen Spiel riskiert, so wird es interessant sein, hier zu untersuchen, wie groß der Vorteil gegenüber dem Mitspieler beim Einsatz jeweils sein muß, damit man ohne Nachteil in das Spiel einsteigen kann. Dazu wollen wir uns wieder ein ganz einfaches Spiel ausdenken, in dem es zwei gleich wahrscheinliche Fälle gibt, einen günstigen und einen ungünstigen. Der im positiven Fall zu erreichende Gewinn sei a, der bei negativem Ausgang hinzunehmende Verlust sei x, und das vorhandene Vermögen betrage α. In diesem Fall haben wir also $AB = \alpha$, $BP = a$ sowie (wegen § 10) $PO = b \ln \frac{\alpha + a}{\alpha}$. Weil nun aufgrund von § 7 $po = PO$ ist, so folgt aus den Eigenschaften der Logarithmusfunktion, daß $Bp = \frac{\alpha a}{\alpha + a}$ sein muß. Bp bezeichnet den Einsatz x. Also ist

$$x = \frac{\alpha a}{\alpha + a}.$$

Diese Größe ist immer kleiner als der mögliche Gewinn a. Daraus folgt auch, daß jemand, der sein gesamtes Vermögen riskiert, dumm handelt, und sei der mögliche Gewinn auch noch so groß, was jeder leicht begreifen wird, der unsere obigen Definitionen richtig verstanden hat. Die im praktischen Leben einmütig vertretene Ansicht, wonach der eine vernünftigerweise etwas riskieren kann und der andere nicht, findet darin ihre Erklärung.

§ 15. Besondere Beachtung verdienen nun die Gepflogenheiten der Kaufleute bei der Versicherung von Waren auf See. Das werde ich anhand des nachfolgenden Beispiels beschreiben. Gaius, der in Petersburg lebt, hat in Amsterdam Ware gekauft, die er in Petersburg für 10000 Rubel verkaufen könnte, wenn sie denn dort wäre. Er bemüht sich also um die Verschiffung nach Petersburg, ist aber nicht sicher, ob er die Ware versichern soll oder nicht. Dabei weiß er, daß von 100 Schiffen, die um diese Jahreszeit von Amsterdam nach Petersburg aufbrechen, durchschnittlich 5 verloren gehen. Jedoch kann er keine Transportversicherung für weniger als 800 Rubel finden, was er für überzogen hält. Gefragt wird nun, wie groß das Vermögen des Gaius – sieht man von der Ware ab – sein muß, damit er vernünftigerweise auf die Versicherung verzichten könnte. Dieses Vermögen werde nun mit x bezeichnet. Wenn er auf die Versicherung der Ware verzichtet, so beläuft sich sein Vermögen zusammen mit der Hoffnung auf einen glücklichen Ausgang des Transports auf $\sqrt[100]{(x + 10000)^{95} \cdot x^5} = \sqrt[20]{(x + 10000)^{19} \cdot x}$. Schließt er dagegen die Versicherung ab, hat er einen sicheren Betrag in Höhe von $x + 9200$. Setzt man beides einander gleich, so erhält man $(x + 10000)^{19} \cdot x = (x + 9200)^{20}$ und daraus ungefähr $x = 5043$. Wenn also Gaius abgesehen von seiner Hoffnung auf den glücklichen Ausgang des Transports ein Vermögen von mehr als 5043 Rubeln hat, dann handelt er richtig, wenn er auf die Versicherung verzichtet. Ist sein Vermögen dagegen kleiner, so sollte er sich versichern.

Wir fragen nun danach, wie groß das Vermögen von jemandem vernünftigerweise mindestens sein muß, der sich für 800 Rubel als Versicherer zur Verfügung stellt. Nennen wir dieses Vermögen y, so gilt

$$\sqrt[20]{(y + 800)^{19} \cdot (y - 9200)} = y$$

oder ungefähr $y = 14243$, ein Ergebnis, das man aus den vorangegangenen Überlegungen auch ohne neue Rechnung hätte ableiten können. Wer also weniger besitzt, handelt unklug, wenn er die Versicherung übernimmt, während es für einen reicheren Unternehmer sehr wohl Sinn macht. So versteht man, daß die Einführung solcher Verträge zweckmäßig ist, denn sie können beiden Seiten großen Nutzen bringen.

Hätte Gaius die Versicherung auch schon für 600 Rubel bekommen können, so wäre er dumm gewesen, den Vertrag abzulehnen, falls sein Vermögen kleiner als 20478 Rubel gewesen wäre. Und er wäre allzu vorsichtig gewesen, wenn er die Waren versichert hätte, obwohl er mehr als 20478 Rubel besitzt. Ebenso wäre jemand unklug gewesen, wenn er sich dem Gaius als Versicherer für eine Prämie von 600 Rubeln angeboten hätte, obwohl sein Vermögen weniger als 29878 Rubel beträgt. Jedoch wäre er gut beraten, dies zu tun, wenn er reicher ist. Niemand aber, und sei er noch so reich, würde seiner Sache einen guten Dienst erweisen, wenn er die Versicherung für eine Prämie von 500 Rubeln übernähme.

§ 16. Aus unserer Theorie folgt noch eine weitere nützliche Regel: Es ist ratsamer, Güter, die einer Gefahr ausgesetzt sind, in mehrere Teile zu zerlegen, als alles auf einmal zu riskieren. Das will ich wieder erklären. Sempronius hat vor Ort ein Barvermögen von 4000 Dukaten und in Übersee außerdem Waren, die einen Wert von 8000 Dukaten verkörpern und nur zur See transportiert werden können. Erfahrungsgemäß stehe fest, daß von zehn Schiffen eins verloren geht. Unter diesen Bedingungen behaupte ich, daß Sempronius einen Wert von 6751 Dukaten erwarten darf, wenn er den gesamten Warenwert von 8000 Dukaten einem einzigen Schiff anvertraut, nämlich $\sqrt[10]{12000^9 \cdot 4000^1} - 4000$. Wenn er dagegen die Waren je zur Hälfte mit zwei Schiffen transportieren läßt, so beläuft sich der erwartete Wert auf

$$\sqrt[100]{12000^{81} \cdot 8000^{18} \cdot 4000} - 4000,$$

also 7033 Dukaten. Und so werden sich die Aussichten des Sempronius immer weiter verbessern, je kleiner der Teil des Warenvermögens ist, der mit einem einzigen Schiff transportiert wird. Und doch wird der Erwartungswert niemals größer als 7200 Dukaten werden. Dieser Ratschlag dürfte auch für diejenigen nützlich sein, welche ihr Vermögen in Fremdwährungswechsel oder andere riskante Projekte investieren.

§ 17. Sehr vieles von dem, was ich nun zu übergehen gezwungen bin, ist sicher völlig neu und auch nicht wertlos. Obwohl allerdings jemand mit gesundem Menschenverstand das meiste davon recht gut versteht und auch entsprechend handelt, so dürfte doch kaum jemand geglaubt haben, daß es möglich sei, die Dinge so präzise zu definieren wie das in unseren Beispielen geschehen ist. Und gerade weil alle unsere Theoreme so vollkommen mit unseren Erfahrungen übereinstimmen, wäre es unangemessen, sie wie unbewiesene Wahrheiten zu behandeln, die auf unsicheren Hypothesen beruhen. Das wird auch durch das folgende Beispiel gestützt, das den Anlaß für meine Überlegungen gab und den folgenden Hintergrund besitzt: mein sehr verehrter Cousin, der berühmte *Nikolaus Bernoulli*, Professor beider Rechte an der Universität zu Basel, legte dem bekannten (Mathematiker) *Montmort* einmal fünf Probleme vor. Diese sind in dem Buch *L'analyse sur les jeux de hazard* von *Monsieur de Montmort* auf Seite 402 wieder abgedruckt worden.

Das letzte dieser Probleme lautet wie folgt: *Peter wirft eine Münze solange, bis sie zum ersten Mal Kopf zeigt. Geschieht das nach dem ersten Wurf, so muß er an Paul einen Dukaten zahlen. Wenn das Ereignis erst nach dem zweiten Wurf eintritt, dann zwei; wenn nach dem dritten, dann vier; wenn nach dem vierten, dann acht, und so weiter in der Weise, daß nach jedem Wurf die Anzahl der Dukaten verdoppelt wird. Welchen Wert hat diese Lotterie für Paul?* Diese Aufgabe erwähnte mein oben genannter Cousin in einem Brief, den er mir mit dem Wunsche sandte, darüber meine Meinung zu erfahren. Obwohl nämlich die traditionelle Rechnung zeigt, daß der von Paul zu erwartende Gewinn unendlich groß ist, so dürfte seiner Meinung nach jeder vernünftige Mensch sehr gern dazu bereit sein, diese Lotterie für 20 Dukaten zu verkaufen. Solange wir das Problem mit den traditionellen Prinzipien angehen, finden wir tatsächlich, daß der Wert der Lotterie für Paul unendlich groß ist, obwohl niemand dieselbe auch nur für einen ziemlich geringen Preis wird kaufen wollen. Wenn wir aber unsere neue Regel anwenden, so entdecken wir die Lösung des Problems. Sie gestaltet sich nach unseren Prinzipien wie folgt.

§ 18. Die Zahl der hier zu betrachtenden Fälle ist unendlich groß. In der Hälfte aller Fälle endet das Spiel nach dem ersten Wurf, in einem Viertel aller Fälle nach dem zweiten, in einem Achtel aller Fälle nach dem dritten, in einem Sechzehntel aller Fälle nach dem vierten und so weiter. Wenn wir nun die Anzahl aller überhaupt möglichen Fälle, obwohl sie über alle

Grenzen geht, mit N bezeichnen, so gibt es offensichtlich $\frac{1}{2}N$ Fälle, in denen Paul 1 Dukaten gewinnt, $\frac{1}{4}N$ Fälle, in denen er 2 Dukaten erhält, $\frac{1}{8}N$, in denen es 4 Dukaten sind, $\frac{1}{16}N$, in denen er 8 Dukaten bekommt, und endlos so weiter.Nennen wir nun das Ausgangsvermögen Pauls α, so hat die Lotterie einen Wert von

$$\sqrt[N]{(\alpha+1)^{N/2}\cdot(\alpha+2)^{N/4}\cdot(\alpha+4)^{N/8}\cdot(\alpha+8)^{N/16}\cdot\ldots}-\alpha$$

oder

$$\sqrt[2]{\alpha+1}\cdot\sqrt[4]{\alpha+2}\cdot\sqrt[8]{\alpha+4}\cdot\sqrt[16]{\alpha+8}\cdot\ldots-\alpha.$$

§ 19. Aus dieser Formel für die Bewertung von Pauls Lotterie ergibt sich, daß der Wert mit dem Ausgangsvermögen von Paul zunimmt, aber niemals über alle Grenzen geht, es sei denn, daß das Ausgangsvermögen unendlich groß ist. Daraus kann man noch diese speziellen Folgerungen ziehen: Wenn Paul völlig besitzlos ist, so beträgt der Wert seiner Lotterie

$$\sqrt[2]{1}\cdot\sqrt[4]{2}\cdot\sqrt[8]{4}\cdot\sqrt[16]{8}\cdot\ldots,$$

was genau 2 Dukaten entspricht. Wenn er 10 Dukaten hätte, dann besäße seine Lotterie einen Wert von ungefähr 3 Dukaten, und ungefähr von $4\frac{1}{3}$ Dukaten, wenn er 100 hätte, und endlich von 6 Dukaten, wenn er 1000 hätte. Hieraus kann man leicht ableiten, wie unermeßlich reich jemand sein müßte, um bei klarem Verstande dem Paul die Lotterie für 20 Dukaten abzukaufen. Der Preis, den der Käufer für eine solche Lotterie zahlen sollte, weicht etwas von dem Betrag ab, der sich ergibt, wenn man die Lotterie schon besitzt. Trotzdem können wir davon ausgehen, daß beide Preise gleich sind, weil die Differenz nur sehr gering ist, sobald α groß ist. Bezeichnen wir den Kaufpreis mit x, so können wir ihn mit Hilfe der Gleichung

$$\sqrt[2]{\alpha+1-x}\cdot\sqrt[4]{\alpha+2-x}\cdot\sqrt[8]{\alpha+4-x}\cdot\sqrt[16]{\alpha+8-x}\cdot\ldots=\alpha$$

bestimmen, und wenn α hinreichend groß ist, so muß näherungsweise

$$x=\sqrt[2]{\alpha+1}\cdot\sqrt[4]{\alpha+2}\cdot\sqrt[8]{\alpha+4}\cdot\sqrt[16]{\alpha+8}\cdot\ldots-\alpha$$

gelten.[4]

Nachdem ich diese Abhandlung vor der Gesellschaft[5] vorgetragen hatte, habe ich eine Abschrift davon an den oben erwähnten Herrn Nikolaus Bernoulli gesandt, um seine Meinung über die von mir vorgeschlagene Lösung seines Problems zu erfahren. Dieser hat in einem Brief, den er mir im Jahre 1732 schrieb, bestätigt, daß ihm meine Meinung über die Bewertung der Lotterie recht gut gefalle, wenn es sich darum handele, daß jemand seine persönliche Einschätzung vorzunehmen habe. Anders verhalte sich die Sache aber, sobald ein Dritter als Richter die Position eines Lotterieteilnehmers nach Recht und Billigkeit zu bewerten habe. Darauf habe ich selbst in § 2 hingewiesen. Ferner teilte mir der ausgezeichnete Wissenschaftler mit, daß der renommierte (Mathematiker) Cramer einige Jahre vor Abfassung meines Aufsatzes eine Theorie über das gleiche Problem entwickelt hat. Und tatsächlich ist dessen Konzept meinem eigenen Ansatz derart ähnlich, daß es bei einem solchen Problem geradezu ein Wunder ist, wie zwei Personen unabhängig voneinander zur gleichen Vorstellung gelangt sind. Daher erscheint es mir zweckmäßig, hier zu zitieren, was Cramer in seinem Brief aus dem Jahre 1728 an meinen Cousin ausgeführt hat. Er schrieb folgendes:

»Vielleicht irre ich mich. Aber ich denke, daß ich das sonderbare Problem gelöst habe, welches Sie *Monsieur de Montmort* in Ihrem Schreiben vom 9. September 1713 vorgelegt haben (Problem Nr. 5, Seite 402). Aus Vereinfachungsgründen nehme ich an, daß der A eine Münze wirft und B sich verpflichtet, dem A einen Ecu[6] zu zahlen, wenn beim ersten Wurf Kopf erscheint, zwei Ecu, wenn dieses Ereignis erst beim zweiten Wurf eintritt, vier Ecu, wenn Kopf beim dritten Mal erscheint, acht Ecu, wenn das beim vierten Wurf geschieht, und so weiter. Paradox daran ist nun, daß die Berechnung für den Preis, den der A an den B zahlen müßte, über alle Grenzen geht, was absurd erscheint, weil niemand mit gesundem Menschenverstand für diese Lotterie 20 Ecu bezahlen würde. Man fragt nach der Ursache für diese Differenz zwischen dem mathematischen Erwartungswert und der in der Praxis üblichen Einschätzung. Ich glaube, sie kommt daher, daß die Mathematiker *(in der Theorie)* das Geld

nach seiner Menge bewerten, während vernünftige Leute *(in der Praxis)* danach fragen, welchen Nutzen sie aus den Gewinnen ziehen können. Was den mathematischen Gewinnerwartungswert unendlich groß werden läßt, ist die ungeheure Summe, die man erhalten kann, wenn Kopf nicht so schnell, sondern erst beim hundertsten oder tausendsten Wurf erscheint. Wenn ich einen solchen Gewinn[7] mit gesundem Menschenverstand beurteile, dann bedeutet er nicht mehr für mich, bringt mir nicht mehr Freude und und gibt mir auch keinen größeren Anlaß, an dem Spiel teilzunehmen, als es eine Summe von 10 oder 20 Millionen Ecu täte. Unterstellen wir daher einmal, daß jeder Gewinn über 10 Millionen Ecu oder (der Einfachheit halber) über $2^{24} = 16\,777\,216$ Ecu einem ebensoviel wert ist, wie ein Gewinn von genau 2^{24} Ecu, oder gehen wir davon aus, daß man nicht mehr als 2^{24} Ecu gewinnen kann, wie spät auch immer Kopf erscheinen mag. In diesem Falle beläuft sich der Erwartungswert der Gewinne auf

$$\begin{aligned}&\frac{1}{2}\cdot 1+\frac{1}{4}\cdot 2+\frac{1}{8}\cdot 4+\ldots+\frac{1}{2^{25}}\cdot 2^{24}+\frac{1}{2^{26}}\cdot 2^{24}+\frac{1}{2^{27}}\cdot 2^{24}+\ldots\\ &=\underbrace{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\ldots}_{\text{24-mal}}+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\ldots\\ &=12+1=13.\end{aligned}$$

So ist der erwartete Nutzen auf 13 Ecu geschrumpft und das Äquivalent dafür auf ebenso viel, was viel vernünftiger erscheint, als es über alle Grenzen wachsen zu lassen.»

Bis hierher ist die Darstellung der Lösung unpräzise und widersprüchlich. Wenn es nämlich wirklich wahr sein sollte, daß uns 2^{25} nicht größer vorkommt als 2^{24}, dann könnte einem auch völlig gleichgültig sein, welchen Betrag man nach dem vierundzwanzigsten Wurf erhalten kann, zumal man ja vor dem fünfundzwanzigsten Wurf bereits $2^{24}-1$ besitzt,[8] was sich in dieser Theorie von 2^{24} nicht unterscheidet. Mit dem gleichen Recht könnte man daher auch sagen, daß die Lotterie einen Wert von 12 anstelle von 13 Ecu besäße. Das sage ich keinesfalls, um das Prinzip Cramers anzugreifen, was ja auch mit meinem identisch ist. Gemeint ist das Prinzip, wonach vernünftige Menschen den Wert von Geld danach beurteilen, welchen Nutzen sie daraus ziehen können. Auch sollte sich dadurch niemand veranlaßt sehen, sich ein negatives Urteil über die Theorie an sich zu bilden. Dasselbe sagt auch der berühmte Cramer mit den folgenden Worten, die ganz in unserem Sinne sind. Bei ihm heißt es nämlich:

»Man wird das Äquivalent der Lotterie noch kleiner finden, wenn man eine andere Vorstellung vom Nutzen des Geldes benutzt. Die soeben angewandte Vorstellung wird nämlich der Sache nicht ganz gerecht, weil ein Gewinn von 100 Millionen sicherlich mehr Freude macht als ein Gewinn von 10 Millionen, wenn vielleicht auch nicht zehnmal so viel. Wollte man beispielsweise annehmen, daß der Nutzen der Quadratwurzel des Gewinns entspricht – das hieße: ein Gewinn von 40 Millionen bereitet doppelt so viel Vergnügen wie ein Gewinn von 10 Millionen –, so hätte die Lotterie einen Erwartungsnutzen von

$$\frac{1}{2}\cdot\sqrt{1}+\frac{1}{4}\cdot\sqrt{2}+\frac{1}{8}\cdot\sqrt{4}+\ldots=\frac{1}{2-\sqrt{2}}.$$

Aber diese Größe ist nicht das Äquivalent, denn dieses muß nicht meinem Erwartungsnutzen entsprechen. Vielmehr muß der Schmerz im Verlustfall genauso groß sein wie die Freude, mit der ich im Gewinnfall rechne. Das Äquivalent aber muß (unter unserer Voraussetzung)[9] genau

$$\left(\frac{1}{2-\sqrt{2}}\right)^2=\frac{1}{6-4\sqrt{2}}=2.9\ldots$$

sein, also weniger als 3, was ziemlich wenig ist und nach meinem Urteil der landläufigen Vorstellung wesentlich näher kommt als 13 ...«

Anmerkungen

[1] Im Original heißt es $y = b \lg \frac{x}{\alpha}$. Da jedoch der natürliche Logarithmus gemeint ist, verwenden wir die heute übliche Schreibweise. Die Funktion $dy = b\,\frac{1}{x}\,dx$ besitzt die Stammfunktion $y = b \ln x + c$. Wegen $y = 0$ für $x = \alpha$ erhält man $c = -b \ln \alpha$. Einsetzen in die Lösung ergibt $y = b \ln x - b \ln \alpha = b\,(\ln x - \ln \alpha)$ und damit das von Bernoulli angegebene Resultat.

[2] Der Begriff Subtangente bedarf der Erläuterung, zumal Bernoulli ihn hier in einer etwas ungewöhnlichen Variante benutzt. Man betrachte eine Tangente an die Kurve $y = b \ln \frac{x}{\alpha}$ an der Stelle x_0

Der Tangentialpunkt hat die Koordinaten $(x_0, b \ln \frac{x_0}{\alpha}$. Projiziert man den Tangentialpunkt auf die y-Achse, so gewinnt man den Punkt mit den Koordinaten $(0, b \ln \frac{x_0}{\alpha}$. Der Schnittpunkt der Tangente mit der Ordinate hat die Koordinaten $(0, b \ln \frac{x_0}{\alpha} - b)$ und werde P_2 genannt. Dann bezeichnet Bernoulli die Entfernung zwischen P_1 und P_2 als Subtangente, und diese ist für beliebiges x_0 genauso groß wie b.

[3] Was Bernoulli hier mit Kurven meint, ist unklar.

[4] Setzt man $\alpha' = \alpha - x$, so kann man vorstehende Gleichung in die Form

$$\sqrt[2]{\alpha'+1}\cdot\sqrt[4]{\alpha'+2}\cdot\sqrt[8]{\alpha'+4}\cdot\sqrt[16]{\alpha'+8}\cdot\ldots=\alpha'+x$$

bringen. Auflösen nach x ergibt

$$x=\sqrt[2]{\alpha'+1}\cdot\sqrt[4]{\alpha'+2}\cdot\sqrt[8]{\alpha'+4}\cdot\sqrt[16]{\alpha'+8}\cdot\ldots-\alpha',$$

was mit Bernoullis Resultat übereinstimmt, wenn sich α und α' nur unwesentlich unterscheiden. Davon kann man ausgehen, wenn x im Verhältnis zu α verschwindet.

[5] Gemeint ist die kaiserliche Akademie der Wissenschaften in Petersburg.

[6] Ein Dreifrankenstück, soviel wie ein Taler.

[7] Sollte Kopf erst beim hundertsten Wurf erscheinen, so würde der A einen Gewinn in Höhe von 2^{99} = 633825300114114700748351602688 Ecu machen, was jenseits aller Vorstellungskraft liegt.

[8] Ein solcher Gewinn ist unter den angegebenen Spielbedingungen unmöglich. Insoweit bleiben die kritischen Anmerkungen Bernoullis zur Vorgehensweise Cramers rätselhaft.

[9] Das heißt: der Wurzelfunktion.

Hermann J. Liebel/Harald K. Meyer/Dieter Schoon*

Das Assessment Center bei der Auslese von Führungskräften

Assessment Center; Ausleseverfahren; Inkrementelle Validität; Prognostische Validität

Die Untersuchung behandelt die Frage, welchen zusätzlichen Vorhersagewert für die innerbetriebliche Karriere ein Assessment Center (AC) aufweist, wenn es a) zur Auswahl künftiger Führungskräfte und b) bei einer Personengruppe eingesetzt wird, deren Führungseignung durch vorausgegangene Personalbeurteilungen bereits belegt ist und wenn c) unabhängig vom AC Personaldaten vorliegen, die eine Karriereprognose ermöglichen.

Das empirische Material besteht aus AC-Ergebnissen und Personaldaten von 55 mittleren Führungskräften in einem deutschen Großunternehmen. Als Karrierekriterien dienen: die Anzahl der Beförderungen in einem festgelegten Zeitraum, die Dauer bis zur nächsten Beförderung und die Anzahl der Förderversetzungen im Unternehmen. Die inkrementelle Validität, ausgedrückt in Prozent der durch die anderen Personaldaten nicht vorhersagbaren Residualvarianz dieser Karrierekriterien, variiert zwischen 0 und 11%. Zwar erfahren alle AC-Erfolgreichen mindestens eine Beförderung, aber auch 87% der AC-Nichterfolgreichen. Die Konsequenzen eines AC-Einsatzes unter den Voraussetzungen a) bis c) werden erörtert.

* Prof. Dr. Hermann J. Liebel, Abteilung für Organisations- und Sozialpsychologie, Universität Bamberg, Markusstr. 3, 96045 Bamberg; Dr. Harald K. Meyer, Psychologie II, Universität Bamberg, Markusstr. 3, 96045 Bamberg; Dipl.-Psych. Dieter Schoon, Gemini Consulting, Du Pont Str. 4, 61352 Bad Homburg v.d.H.

1. Einleitung und Problemstellung

Das Assessment Center (AC) ist seiner Entstehungsgeschichte nach ein Personalauseleseverfahren. Zunehmend mehr wird es jedoch auch als Vorstufe gezielter individueller Personalförderungsmaßnahmen eingesetzt. Anhand dieser vereinfachenden Typologisierung lassen sich die zwei Funktionen des AC folgendermaßen skizzieren, wobei auch die Kombination beider möglich ist:

Das AC als Ausleseinstrument: Kandidatenauswahl aufgrund von Personaldaten (Vorselektion) -> Durchführung des AC -> Trennung der Kandidaten aufgrund der Ergebnisse in »Erfolgreiche« und »Nicht-Erfolgreiche« -> Besetzung freier Positionen mit »Erfolgreichen« nach mehr oder minder intensiver individueller Vorbereitung.

Das AC als Förderungsinstrument: Kandidatenauswahl aufgrund von Personaldaten (Vorselektion) -> Durchführung des AC -> Erstellung von Leistungsprofilen der Kandidaten (Stärken- und Schwächenprofil) -> Individuelle gezielte Förderung des Entwicklungspotentials aller Kandidaten.

Das AC, das in der vorliegenden Untersuchung geprüft wurde, wird in einem deutschen Großunternehmen als Ausleseinstrument wie auch als Instrument zur Führungskräftepotentialentdeckung eingesetzt. Sein primäres Ziel ist die Suche nach besonders qualifizierten Führungskräften auf der mittleren Führungsebene, d.h. die Selektion und Karriereeröffnung von intern rekrutiertem Personal. Die AC-Teilneh-