Skript zur Vorlesung “Kapitalmarkttheorie”

Univ.–Prof. Dr. Dr. Andreas Löffler

letzte Änderung am 4. Dezember 2011

Inhaltsverzeichnis

1 Wiederholung: Entscheidungstheorie

Lernziel: Wir präsentieren die wichtigsten Erkenntnisse aus der Vorlesung "Entscheidungstheorie".

1.1 Nutzentheorie

In der Vorlesung "Entscheidungstheorie" haben wir sehr allgemeine Nutzenfunktionen kennen gelernt. Da wir im Verlauf dieser Vorlesung nur auf einen Spezialfall zurückgreifen werden, konzentrieren wir uns darauf bereits in der Wiederholung.

Wir betrachten einen Zeitpunkt. Wir setzen voraus, dass es ein Gut gibt, das von den Haushalten konsumiert werden kann.[1]

Wir unterscheiden zwei Zeitpunkte, die eine festgelegte Einheit (etwa ein Jahr) auseinanderliegen. Der heutige Zeitpunkt ist sicher, die Zukunft ist unsicher. Wir setzen voraus, dass es insgesamt S einander wechselseitig ausschließende Zustände in dieser Zukunft gibt, die wir mit dem Index $s = 1, \ldots, S$ (s steht für "state") bezeichnen. Wir gehen weiter davon aus, dass wir jedem Zustand s eine Wahrscheinlichkeit seines Eintretens zuordnen können. Diese Wahrscheinlichkeit bezeichnen wir mit q_s, sie ist sinnvollerweise größer null und alle q_s summieren sich natürlich zu eins. Es gebe an unserem Markt insgesamt nur ein handelbares und konsumierbares Gut. Ein Vertrag (auch Wertpapier oder Portfolio) beschreibt nun, welche Mengen des Gutes dem Investor in unterschiedlichen Zuständen ausgezahlt werden:

$$X = \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \\ \vdots \\ X_S \end{pmatrix} \quad \begin{array}{ll} \longleftarrow & \text{Gütermenge im ersten Zustand} \\ \longleftarrow & \text{Gütermenge im zweiten Zustand} \\ & \quad\vdots \\ \longleftarrow & \text{Gütermenge im } S\text{–ten Zustand} \end{array}$$

Ein Wertpapier ist in unserem Modell genau dann risikolos, wenn es genau eine Einheit des Gutes in jedem Zustand auszahlt. Wir werden es auch durch eine fett gedruckte Eins darstellen:

$$\mathbf{1} := \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Die allgemeine Nutzentheorie geht davon aus, dass ein Investor seine Entscheidung an Hand einer Nutzenfunktion ausrichtet. Eine allgemeine Nutzenfunktion ist dabei eine Funktion

$$U(X_1, \ldots, X_S),$$

die in jeder Variable monoton ist ("mehr ist besser"). Oft wird noch unterstellt, dass die Nutzenfunktion quasikonkav ist, damit die Lösung eines individuellen Maximierungsproblems eindeutig ist.[2]

[1] In der Vorlesung "Entscheidungstheorie" haben wir n Güter betrachtet.

[2] Eine Nutzenfunktion ist quasikonkav, wenn die Indifferenzkurven konvex sind, also einen fallenden Anstieg (Tangente) aufweisen.

1.2 Erwartungsnutzentheorie

Eine Spezialisierung der allgemeinen Nutzentheorie stellt die Erwartungsnutzentheorie dar. Zweck der Erwartungsnutzentheorie ist es, das Risikoverhalten von Investoren genauer zu beschreiben. Zu diesem Zweck führt man Erwartungsnutzenfunktionen ein. Hat ein Investor die Wahl zwischen zwei Portfolios X und Y, so wählt er dasjenige Portfolio, dessen Erwartungsnutzen höher ist. Er zieht also X dem Portfolio Y genau dann vor, wenn

$$\mathrm{E}[u(X)] \geq \mathrm{E}[u(Y)]$$

für seine Erwartungsnutzenfunktion u. Als Erwartungsnutzenfunktionen sind dabei nur monoton steigende und konkave Funktionen zulässig, da nur sie Risikoaversion widerspiegeln. Die Höhe dieser Risikoabneigung wird durch das Arrow–Pratt–Maß der Risikoaversion angegeben:

$$-\frac{u''(t)}{u'(t)} = \text{Arrow–Pratt–Maß.}$$

Eine besondere Rolle spielen diejenigen Erwartungsnutzenfunktionen $u(t)$, bei denen dieser Koeffizient konstant (also unabhängig von t) ist. Es handelt sich um die CARA–Funktionen, die sich parametrisch in der folgenden Art und Weise darstellen lassen:

$$u(t) = -e^{-at} \qquad \text{CARA–Nutzenfunktion.}$$

CARA-Funktionen haben die Eigenschaft, dass Investoren in einem einfachen Portfolioproblem ihr riskantes Portfolio bei Vermögensänderungen nicht anpassen müssen. In sehr vielen ökonomischen Modellen finden diese Funktionen Verwendung.

In selteneren Fällen werden wir Funktionen betrachten, bei denen die Risikoaversion nicht konstant, sondern hyperbolisch fallend ist. Man spricht auch von HARA–Nutzenfunktionen. Sie lassen sich in der folgenden Art und Weise darstellen

$$u(t) = \ln(t), \quad u(t) = \frac{t^a - 1}{a} \; (a < 1, a \neq 0) \qquad \text{HARA–Nutzenfunktion.}$$

In der Literatur wird die Meinung vertreten, diese Nutzenfunktionen seien sehr plausibel, wenn man experimentell oder empirisch beobachtbares Verhalten von Investoren modellieren will.

Ein Investor, der im Rahmen der Erwartungsnutzentheorie eine Portfolioentscheidung trifft, muss folgendes Maximierungsproblem lösen. Wenn der Preis eines Titels X mit $p(X)$ bezeichnet wird und das Budget des Investors gerade w beträgt, so ist das optimale Portfolio gerade die Lösung von

$$\max \mathrm{E}[u(X)], \qquad \text{s.t. } p(X) \leq w, \ X \geq 0. \tag{1}$$

Die Erwartungsnutzenfunktionen der Investoren sind immer monoton wachsend: mehr ist besser. Daher können wir im folgenden davon ausgehen, dass die Budgetbedingung immer mit Gleichheit erfüllt sein wird: $p(X) = w$. Anderenfalls könnte der Investor von dem ihm verbleibenden Geldbetrag weiter risikolose Assets erwerben und würde in jedem Fall seinen Nutzen erhöhen. Ebenso sind die Erwartungsnutzenfunktionen der Investoren konkav, weil die Investoren risikoavers sind.

Die Nichtnegativitätsbedingung $X \geq 0$ müssen wir dem Maximierungsproblem hinzufügen, weil ein Investor keine negativen Gütermengen konsumieren kann.

1.3 μ–σ–Theorie

Die μ–σ–Theorie geht von einem veränderten Modell aus. Es gibt an einem Markt insgesamt S Wertpapiere oder Basistitel. Diese Basistitel mögen Zahlungen in der Zukunft versprechen, die wir mit Y^s bezeichnen wollen. Die Zahlungen sind im allgemeinen unsicher und daher mathematisch Zufallsvariablen. Der Erwartungswert der Zahlung des s–ten Basistitels wird mit $\mathrm{E}[Y^s]$ bezeichnet, die Kovarianz der Zahlungen des s–ten und des r–ten Basistitels mit $\mathrm{Cov}[Y^s, Y^r]$.

Unter einem Portfolio verstehen wir eine Zusammenstellung von S Basistiteln, wir bezeichnen dieses Portfolio mit X. Diese Zusammenstellung erfolgt in der Gegenwart und die Struktur des Portfolios ändert sich in der Zukunft nicht mehr. Die Einträge in dem Portfoliovektor sind wie folgt zu interpretieren:[3]

$$X = \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \\ \vdots \\ X_S \end{pmatrix} \begin{array}{ll} \longleftarrow & \text{Menge erstes Wertpapier} \\ \longleftarrow & \text{Menge zweites Wertpapier} \\ & \vdots \\ \longleftarrow & \text{Menge } S\text{–tes Wertpapier} \end{array}$$

Ein negativer Eintrag bedeutet in unserem Modell, dass der Inhaber des Assets beispielsweise -3 Titel eines Basistitels besitzt. Diese Situation kann realistischerweise so verstanden werden, dass der Investor sich heute das Asset borgt und es einen Zeitpunkt später wieder zurückgeben muss. Einen solchen Vorgang bezeichnet man als Leerverkauf.

Wir werden unterstellen, dass unter den genannten S Wertpapieren ein risikoloser Titel ist. Der Einfachheit halber sei dies der erste Titel. Hier entsteht also ein wichtiger Unterschied zur Erwartungsnutzentheorie. Der risikolose Titel wird jetzt durch $(1,0,\dots,0)$ beschrieben; in der Erwartungsnutzentheorie war es dagegen $(1,1,\dots,1)$.

Wir können Portfolios X der Basistitel bilden. Diese Portfolios haben eine Auszahlung in der Höhe

$$\sum_{s=1}^{S} X_s Y^s.$$

Wir wollen die Erwartungswerte und Kovarianzen dieser Zahlungsströme ermitteln. Dafür wäre nun ein weiteres Symbol notwendig.

[3] Man beachte: Bei X_s handelt es sich im Grundmodell des Erwartungsnutzens um eine Zahlung des Titels X im Zustand s. Hier steht X_s für die Menge des Titels Y^s im Portfolio X!

Wir wollen es uns an dieser Stelle einfach machen und den Erwartungswert der Zahlung des Portfolios X mit $\mathrm{E}[X]$ bezeichnen.[4] Ebenso soll die Kovarianz zwischen den Zahlungen des Portfolios X und des Portfolios Z mit $\mathrm{Cov}[X,Z]$ bezeichnet werden, um eine leichtere Lesbarkeit zu erreichen.

[4] Streng genommen würde es sich bei diesem Symbol ja um den Erwartungswert der Wertpapiermengen X handeln. Ein solcher Erwartungswert aber spielt in unserem Modell keine Rolle, wir benötigen dafür kein eigenes Symbol.

Des weiteren wollen wir annehmen, dass sich unter den riskanten Titeln nur soviele Assets wie unbedingt nötig befinden mögen. Wann ist ein Titel überflüssig? Wir haben in der Vorlesung Entscheidungstheorie auf folgenden Zusammenhang hingewiesen: Unter S Basistiteln sind keine Titel überflüssig genau dann, wenn die Kovarianz–Matrix

$$\begin{pmatrix} \mathrm{Cov}[Y^2,Y^2] & \mathrm{Cov}[Y^2,Y^3] & \cdots & \mathrm{Cov}[Y^2,Y^S] \\ \mathrm{Cov}[Y^3,Y^2] & \mathrm{Cov}[Y^3,Y^3] & \cdots & \mathrm{Cov}[Y^3,Y^S] \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \mathrm{Cov}[Y^S,Y^2] & \mathrm{Cov}[Y^S,Y^3] & \cdots & \mathrm{Cov}[Y^S,Y^S] \end{pmatrix}$$

eine von null verschiedene Determinante hat.

Wir betrachten nun einen Investor, der eine μ-σ–Nutzenfunktion besitzt und seinen Nutzen aus dem Vermögen w maximieren möchte. Dieser Investor löst das folgende Problem

$$\max V(\mathrm{E}[X], \mathrm{Var}[X]), \qquad \text{s.t. } p(X) \leq w. \tag{2}$$

Eine Nichtnegativitätsbedingung $X \geq 0$ finden wir hier nicht, weil X keine Gütermengen beschreibt. Vielmehr handelt es sich um Portfolios verschiedener Basistitel und da würde die Bedingung $X \geq 0$ einen Ausschluss von Leerverkäufen bedeuten. Leerverkäufe sollen aber in unserem Modell zulässig sein.

Wir haben in der Vorlesung zur Entscheidungstheorie zwei wichtige Erkenntnisse gewonnen:

- Der Investor wird sein Budget immer vollständig ausschöpfen (anderenfalls kaufte er risikoloses Asset hinzu – was immer seinen Nutzen erhöhen würde). Daher gilt für das optimale Portfolio immer $p(X) = w$.
- Das optimale Portfolio setzt sich aus zwei Komponenten zusammen (Tobin–Separation). Eine Komponente ist das risikolose Asset. Die andere Komponente ist ein Portfolio, das weder vom Budget noch der Nutzenfunktion des Investors abhängig ist. Dieses Portfolio wird auch Preisportfolio genannt, da es nur von den Eigenschaften der Wertpapiere und insbesondere deren Preisen abhängt.

2 *Gleichgewichtstheorie*

In der Vorlesung "Entscheidungstheorie" haben wir in normativer Weise einem Investor Vorschläge unterbreitet, wie er seine Entscheidungen an Märkten zu treffen hat. Der Investor wird, wenn unsere Argumente überzeugend waren, unserer Theorie folgen und sich an die Empfehlungen halten. In der Gleichgewichtstheorie wollen wir uns jetzt mit der Frage auseinander setzen, ob eine solche Situation gesamtwirtschaftlich zu einem Chaos oder aber zu einer für alle Beteiligten sinnvollen und vorteilhaften Situation führt. Die Gleichgewichtstheorie prüft, ob unsere Entscheidungsansätze auch gesamtwirtschaftlich sinnvoll sind und welche Schlussfolgerungen wir aus der Tatsache ziehen können, dass alle Investoren unseren Empfehlungen folgen.

Die Idee der Gleichgewichtstheorie geht auf das wohl erste ökonomische Werk der Neuzeit, den *Reichtum der Nationen* von Adam Smith, zurück. Smith stellte seinerzeit eine kühne These auf: Eine Gesellschaft werde nicht dadurch reich, dass sie von einem klugen Fürsten regiert werde, sondern dass jeder seinem Eigennutz fröne. Die unsichtbare Hand des Marktes sorge dann dafür, dass es zu einer für alle Beteiligten vorteilhaften Situation komme. Die Ökonomen des 20. Jahrhunderts hat immer wieder die Frage beschäftigt, ob und wie diese Aussagen im Rahmen eines formalen Modells bewiesen werden können. Dieses formale Modell ist die Gleichgewichtstheorie.

Dabei werden wir auf den Fall eingehen, dass unsere Investoren sich an die Erwartungsnutzen– oder die μ–σ–Theorie halten. Die entsprechenden Gleichgewichtsmodelle heißen Time State Preference Modell und Capital Asset Pricing Modell (abgekürzt CAPM). In der betriebswirtschaftlichen Literatur ist das CAPM heute das am häufigsten verwendete Modell; selbst das Handelsblatt listet die dort vorkommenden Betafaktoren täglich neu auf. Wir beginnen mit der allgemeinen Gleichgewichtstheorie.

2.1 *Allgemeines Gleichgewicht*

Lernziel: Wir definieren den Begriff der Allokation und des Tauschgleichgewichts.

Idee eines Tauschgleichgewichts Im Folgenden verwenden wir ein Modell mit S einander ausschließenden Umweltzuständen in der Zukunft. In der Entscheidungstheorie haben wir *einen* Investor betrachtet, der eine Nutzenfunktion $U(x)$ besitzt und sein Maximierungsproblem löst. In einem Gleichgewichtsmodell wird es nun *endlich viele* Investoren geben, die ihren Nutzen maximieren.[5]

[5] Modelle mit unendlich vielen Investoren werden wir nicht betrachten, da die mathematischen Voraussetzungen über die uns zur Verfügung stehenden Mittel hinausgehen und kaum zusätzliche ökonomische Erkenntnisse gewonnen werden können.

Um unser Modell so einfach wie nur möglich zu gestalten, verzichten wir zudem auf die Berücksichtigung der Güterproduktion. Vielmehr tauschen die am Markt agierenden Investoren ihre Produkte nur untereinander aus. Man spricht in diesem Fall auch von einer Tauschökonomie und dementsprechend einem Tauschgleichgewicht. Wollen wir auch die Produktion in diese ökonomischen Modelle einführen, so müssten wir beispielsweise die Produktionsmöglichkeiten beschreiben und etwas tiefer in die Gleichgewichtstheorie einsteigen.

Die Investoren, die auf dem Markt agieren, tauschen zudem nur ein Gut aus. Eine nahe liegende Verallgemeinerung besteht in der Idee, mehrere Güter zum Tausch zuzulassen. Leider wird die Mathematik der Gleichgewichtstheorie dann sehr schnell kompliziert, so dass wir auch auf diese Verallgemeinerung verzichten. In dem uns vorliegenden Fall spricht man von einem *Finanzmarkt*–Gleichgewicht, wenn es nur ein einziges handelbares Gut gibt.

Nach all den Einschränkungen werden Sie sich fragen, was unser Modell dann überhaupt noch beschreibt. Es kann nicht um die Frage gehen, wie optimal produziert wird, weil keine Produktion im Modell vorhanden ist. Es kann auch nicht um die Zusammenstellung optimaler Konsumpläne gehen, weil nur ein Gut gehandelt wird. In den Finanzmarkt–Gleichgewichten tauschen Investoren Güterbündel, die sie in verschiedenen Zuständen erhalten werden, gegen andere Güterbündel, die sie in anderen Zuständen erhalten können. Es geht also um die *optimale Allokation von Risiko*.

Ein Investor erwartet in der Zukunft einen von zwei möglichen Zuständen (etwa "Zahl" oder "Kopf"). Er hat beispielsweise in seiner Erstausstattung im Zustand "Kopf" große Mengen eines Gutes und möchte sich gegen den Eintritt des Zustandes "Zahl" absichern, bei dem er ohne Handel erst einmal nichts bekommen würde. Als Ausgleich ist er bereit, dafür geringere Gütermengen im Zustand "Kopf" in Kauf zu nehmen. Er hat bei einem solchen Tausch offensichtlich eine gewisse Vorstellung von dem Risiko, das ihn in den Zuständen "Kopf" oder "Zahl" erwartet und möchte seine Gütermengen diesem Risiko anpassen. Er wird dazu wohl mit anderen Investoren handeln, die das Risiko der Zustände anders einschätzen und bereit sind, mit ihm zu tauschen – beispielsweise weil sie weniger risikoscheu sind oder andere Erstausstattungen besitzen. In einem Finanzmarktgleichgewicht geht es um eine optimale Risikoallokation zwischen Investoren.

Der Marktmechanismus Der Tausch findet an einem Markt statt. Die Investoren treffen mit ihren Erstausstattungen am Markt ein, man einigt sich auf dem Marktplatz auf Preise der zu tauschenden Güter und jeder erwirbt nun (entsprechendem dem Vermögen, das sich aus den Preisen der Erstausstattung ergibt) sein optimales Portfolio. Dabei wird für jedes Handelsobjekt (Wertpapier, Gut, ...) ein einheitlicher Marktpreis verlangt – die Investoren dürfen sich nicht jeweils untereinander (etwa bilateral) auf "private" Marktpreise einigen, sondern müssen für alle Tauschobjekte diesen einheitlichen Preis akzeptieren. Wie sie sich auf diesen Marktpreis einigen, ist nicht Gegenstand unserer Theorie.[6]

Ist dieser Einigungsprozess insgesamt erfolgreich, so sprechen wir von einem Tauschgleichgewicht (auch GE oder "General Equilibrium") am Finanzmarkt. Erfolgreich ist also ein Einigungsprozess, wenn zwei Bedingungen gleichzeitig erfüllt sind:[7]

1. Jeder Investor maximiert seinen Nutzen gegeben die Preise.

[6] Einer der Begründer der Gleichgewichtstheorie, Leon Walras, nahm hier Zuflucht zum "(Walrasianischen) Auktionator". Dieser Auktionator war eine fiktive Person, die so lange einen Preis ausruft, bis sich Angebot und Nachfrage decken.

Im Übrigen ist die Frage, wie es zu einem Gleichgewicht kommt, für die Ökonomie von geringer Bedeutung. In der Physik lautet eines der Newtonschen Axiome Kraft=Gegenkraft und es wird nicht diskutiert, wie dabei Kraft und Gegenkraft zum Ausgleich kommen. Man geht vielmehr davon aus, dass dieses Gesetz immer gilt. Genau so verhält es sich mit dem Gleichgewicht in der Wirtschaftswissenschaft.

[7] Beide Bedingungen beschreiben nun exakt, was Adam Smith in seinem Hauptwerk eher verbal beschrieb.

2. Die Märkte räumen, also Angebot und Nachfrage stimmen überein.

Ein Beispiel In der Vorlesung werden wir an dieser Stelle ein konkretes Beispiel betrachten. Wir unterscheiden zwei nahe aufeinander folgende Zeitpunkte, die durch einen Münzwurf voneinander getrennt sind. In $t = 1$ gibt es damit die zwei möglichen Zustände "Kopf" oder "Zahl".

Wenn es nur zwei Zustände gibt, so genügt es, auch nur mit zwei Basistiteln zu handeln. Der erste Basistitel Y^1 verspricht eine Einheit eines Gutes, wenn "Kopf" eintritt, der nächste Basistitel Y^2 verspricht eine Gütereinheit, wenn "Zahl" eintritt:[8]

$$\underbrace{Y^1}_{\text{rot}} = \begin{cases} \text{ein Gut} & \text{wenn Kopf,} \\ \text{nichts} & \text{wenn Zahl,} \end{cases} \qquad \underbrace{Y^2}_{\text{blau}} = \begin{cases} \text{nichts} & \text{wenn Kopf,} \\ \text{ein Gut} & \text{wenn Zahl.} \end{cases} .$$

In der Vorlesung hatten wir den ersten Basistitel mit roter Schrift gekennzeichnet, den zweiten mit blauer Schrift. Die Erstausstattungen beinhalten das Risiko, dass bei unglücklicher Wahl des Münzwurfes der Investor leer ausgehen kann. Will er dies vermeiden, so muss er eine Kombination aus Y^1 und Y^2 am Markt erwerben. Wer beispielsweise $\frac{2}{3}$ Güter bei Kopf und $\frac{4}{5}$ Güter bei Zahl haben möchte, muss $\frac{2}{3}$ von Y^1 und $\frac{4}{5}$ vom zweiten Basistitel Y^2 erwerben.

Die Investoren haben eine Erstausstattung an diesen beiden Basistiteln.[9] In unserem Beispiel werden insgesamt sechs Investoren handeln. Ein Teil der Investoren besitzt als Erstausstattung genau einen Titel Y^1. Wenn nicht gehandelt werden kann, heißt das: Bei "Kopf" werden sie eine Einheit des Gutes erhalten, sonst gehen sie leer aus. Die andere Gruppe von Investoren dagegen hat als Erstausstattung genau einen Titel Y^2. Wenn nicht gehandelt wird, so bedeutet das für diese Investoren: Im Fall "Zahl" erhalten sie ein Gut, sonst erhalten sie nichts.

Ohne eine Handel wird genau eine der beiden Gruppen nach dem Münzwurf ein Gut besitzen. Sie sind die Gewinner des Spiels, die anderen haben es verloren. Einige Investoren mögen mit diesen Risiko keine Probleme haben. Die meisten Investoren sind jedoch risikoavers und ziehen es vor, dass sie in beiden Zuständen, also "Kopf" *und* "Zahl", nicht leer ausgehen. Um in eine solche Situation zu gelangen, müssen sie ihre Erstausstattungen miteinander tauschen. Wir werden in der Vorlesung ein Gleichgewicht an diesem Markt experimentell bestimmen.

In der Vorlesung werden wir die Fiktion des Walrasianischen Auktionators dadurch umsetzen, dass der Dozent diese Aufgabe übernimmt. Er benennt die Preise der Wertpapiere. Da wir zwei Basistitel zur Verfügung haben, müsste er eigentlich zwei Preise benennen. Da wir jedoch nur auf die relativen Preise achten müssen (es kommt nur auf das Preis*verhältnis* beider Titel an), können wir

[8] Wir hatten vereinbart, dass in unserem Modell der erste Basistitel risikolos ist. Von dieser Übereinkunft weichen wir in unserem Beispiel ab, weil es sonst zu unübersichtlich würde und die Spieler in der Vorlesung kompliziertere Optimierungsprobleme zu lösen hätten.

[9] Ein wesentlich komplizierteres, dafür aber realistischeres Beispiel läge vor, wenn wir unendlich viele Zustände hätten und als Basistiel die an der Frankfurter Börse gehandelten Titel auffassen würden. Die Erstausstattung eines Investors wäre dann der Besitz an Aktien, Derivaten und Bonds, den ein Investor im Startzeitpunkt $t = 0$ hält. Im schlimmsten Fall übrigens, in dem ein Investor gar keine Basistitel besitzt, hätte er eine Erstausstattung von Null.

einen der beiden Wertpapierpreise normieren und wählen dazu

$$p\left(Y^1\right) = 1, \qquad p\left(Y^2\right) = p$$

und der Auktionator wird nur p ausrufen. Es bietet sich an, mit $p = 1$ zu starten, wenn man (wie hier) so wenig Informationen über die gesamte Geschehen zur Verfügung hat.

Unter dieser Bedingung besitzt jeder Investor ein Vermögen von einer Geldeinheit – egal welche Erstausstattung (Y^1 oder Y^2) er in den Händen hält. Die meisten Studenten werden das Portfolio $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ als optimal empfinden, da sich beide Zustände praktisch nicht voneinander unterscheiden und so scheinbar die beste Risikoallokation erzielt wird.[10] Die Gesamtheit dieser Nachfragen nennt man eine "Allokation".

[10] Nicht alle Studenten sind so risikoscheu. Einige bleiben sogar bei der Erstausstattung, um Glücksfall möglichst das ganze Gut zur Verfügung zu haben und nehmen das dazugehörige Risiko gern in Kauf.

Eine solche Allokation ist dann ein Gleichgewicht, wenn die Märkte räumen – wenn also jede Nachfrage auf ein Angebot trifft und umgekehrt. Unterstellen wir einmal für einen Moment, dass alle sechs Investoren $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ als optimal empfunden haben. Führt $p = 1$ in dieser Situation zu einem Gleichgewicht? Da es sechs Investoren gibt, führt das zu einer Gesamtnachfrage von jeweils drei Titeln Y^1 und drei Titeln Y^2. Die Erstausstattungen an Basistiteln sind aber nicht gleichmäßig verteilt: Vielmehr gibt es *vier* Investoren, die den Titel Y^1 und nur *zwei* Investoren, die den Titel Y^2 als Erstausstattung besaßen. Der zweite Basistitel Y^2 ist knapper als der erste Titel Y^1 und dies spiegelt der Gleichgewichtspreis nicht wider.[11]

[11] Ein Gleichgewicht bei $p = 1$ würde beispielsweise vorliegen, wenn die Investoren mit gleich vielen Mengen an Y^1 und Y^2 ausgestattet wären und jeder Investor $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ nachfragt. Gilt nur eine der beiden Bedingungen nicht mehr, so wird im Allgemeinen $p = 1$ nicht mehr zum Gleichgewicht führen. In unserem Beispiel werden wir uns auf die ungleichen Erstausstattungen konzentrieren, wollen aber nicht verschweigen, dass auch unterschiedliche Risikoaversionen dazu führen können, dass $p = 1$ kein Gleichgewichtspreis ist.

Auch bei dem in unserer Vorlesung präsentierten Beispiel werden wir feststellen, dass es allein durch die ungleich verteilten Erstausstattungen $p = 1$ kein Gleichgewichtpreis darstellt. Y^2 ist knapper als Y^1. Daher muss der Auktionator den Preis p erhöhen, um Angebot und Nachfrage zum Ausgleich zu bringen. Beispielsweise könnte er $p = 2$ wählen. Jetzt müssen alle Investoren ihr optimales Portfolio erneut bestimmen. Denn die Investoren mit der Erstausstattung Y^1 können sich jetzt die Nachfrage $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ nicht mehr leisten, da der Titel Y^2 zu teuer geworden ist. Mögliche Kombinationen, die sie erwerben können, beinhalten beispielsweise

$$\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{4}\right) \text{ oder } \left(0, \frac{1}{2}\right) \text{ oder } \left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right) \text{ oder } (1, 0) \ldots$$

Im Gegenzug können Investoren mit der Erstausstattung Y^2 wesentlich mehr als die bisherige Nachfrage $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ erwerben. Wenn jetzt getauscht wird, bekommt man im Zeitpunkt $t = 1$ für einen Verzicht auf eine Gütereinheit bei "Kopf" nur eine halbe Gütereinheit bei "Zahl" mehr – dieses Verhältnis spiegelt die ungleiche Verteilung der Erstausstattungen wider. Ob $p = 2$ tatsächlich ein Gleichgewicht ist, wird das konkrete Verhalten der Studenten in der Vorlesung zeigen.[12]

[12] In Abschnitt 2.6 errechnen wir unter gewissen Verhaltensannahmen, wie ein Gleichgewichtspreis aussehen muss.

Formale Definition Wir wollen die bisher nur intuitive Beschreibung eines Tauschgleichgewichtes in eine formale Definition umsetzen. Dazu betrachten wir einen Markt mit einem Gut und zwei

Zeitpunkten. Die Zukunft ist unsicher und es sind S verschiedene Zustände möglich. An diesem Markt agieren I Investoren, die wir mit dem Kleinbuchstaben $i = 1, \ldots, I$ indizieren.

Jeder der Investoren besitzt eine Erstausstattung. Die Erstausstattung des i–ten Investors werden wir mit einem Querstrich kennzeichnen: $\bar{X}^i$. Das Gesamtangebot aller Investoren ist dann die Summe der Erstausstattungen

$$\bar{X} = \sum_{i=1}^{I} \bar{X}^i.$$

Der i–te Investor kann seine Erstausstattung tauschen und wird am Finanzmarkt versuchen, ein optimales ("besseres") Portfolio zu erwerben. Diese Nachfrage bezeichnen wir mit X^i. Eine solche Menge von Nachfragen X^i für alle Investoren i nennen wir auch eine Allokation:

Definition 2.1 (Allokation) *Eine Menge von Nachfragen X^i über alle Investoren i heißt* Allokation*:*

$$\left\{ X^i \ : \ i = 1, \ldots, I \right\}.$$

Wir nennen eine Allokation zulässig*, wenn die Summe der Nachfragen das Marktangebot nicht übersteigt:*

$$\sum_{i=1}^{I} X^i \leq \bar{X}.$$

Wenn alle Investoren ihre Nachfragen ermittelt haben und die Märkte mit diesen Nachfragen räumen (also Angebot und Nachfrage übereinstimmen), dann haben wir ein Tauschgleichgewicht. Die Frage, wie man etwa bei gegebenen Nutzenfunktionen derartige Tauschgleichgewichte bestimmt, wollen wir für einen Moment zurückstellen.

Definition 2.2 (Gleichgewicht) *Ein* Tauschgleichgewicht *besteht aus Preisen $p(X)$ der Portfolios X und einer Allokation X^i der Investoren $i = 1, \ldots, I$. Dabei müssen die folgenden beiden Bedingungen erfüllt sein*

- *X^i ist die Lösung des Nutzenmaximierungsproblems (1) des Investors i.*
- *Die Märkte räumen, d.h. die Gesamtnachfrage entspricht dem Gesamtangebot*

$$\underbrace{\sum_{i=1}^{I} X^i}_{Nachfrage} = \underbrace{\bar{X}}_{Angebot} \tag{3}$$

Nachdem wir uns auf die Definition eines Gleichgewichts geeinigt haben, stellt sich folgende Frage. Zuerst einmal ist keinesfalls offensichtlich, dass so definierte Gleichgewichte an Märkten existieren. Sicherlich kann man dafür sorgen, dass bei einem Preis eines Wertpapiers sich Angebot und Nachfrage dieses Titels die Waage halten. Aber der Gleichgewichtsbegriff verlangt, dass dies für alle