

# Wichtige mathematische Elemente

Univ.-Prof. Dr. Dr. Andreas Löffler

letzte Änderung am 17. März 2022

## Inhaltsverzeichnis

- 1 Wozu dient dieses Skript? 1
- 2 Schreibweisen, Mengenlehre 1
- 3 Aussagenlogik 5
  - 3.1 Grundbegriffe 5
  - 3.2 Logische Verknüpfungen 6
  - 3.3 Quantoren 8
  - 3.4 Rechenregeln 8
  - 3.5 Weiterführende Links 10
- 4 Summen und Produkte 10
  - 4.1 Symbole 10
  - 4.2 Arithmetisches, geometrisches und harmonisches Mittel 11
  - 4.3 Geometrische Reihe 12
- 5 Matrizenrechnung und das Lösen von Gleichungssystemen 13
- 6 Erwartungswerte und Varianzen 17
  - 6.1 Diskrete Zufallsvariable 18
  - 6.2 Stetige Zufallsvariablen 18
  - 6.3 Weitere Zusammenhänge 19
- 7 Differentiation und Integration 20
  - 7.1 Funktionsbegriff, Eigenschaften von Funktionen einer Variablen 20
  - 7.2 Nullstellen und Näherungsverfahren 21
  - 7.3 Einfache Ableitungsfunktionen und -regeln 23
  - 7.4 l'Hospitalsche Regel 23
  - 7.5 Stammfunktionen und Integration 24
  - 7.6 Funktionen mehrerer Variablen 24
- 8 Lösungen 26

## 1 Wozu dient dieses Skript?

Wer ein Ökonomiestudium beginnt, rechnet nicht unbedingt damit, dass er tiefe Mathematik-Kenntnisse benötigt. Er glaubt vielmehr, dass es im Studium eher um inhaltliche, qualitative Diskussionen gehen wird, dass volkswirtschaftliche Prozesse oder betriebliche Probleme diskutiert und analysiert werden. Spätestens in der ersten VWL-Veranstaltung wird einem dann klar, dass es vielleicht doch besser gewesen wäre, einen Mathematik-Leistungskurs zu belegen. . .

Erschwerend kommt hinzu, dass die mathematischen Veranstaltungen des Grundstudiums länger zurückliegen und vieles vergessen wurde. Ich habe versucht, in diesem Skript diejenigen Dinge zu bündeln, die für die Veranstaltungen in unserem Bachelor- bzw. dem Masterstudium von Bedeutung sind. Das Kapitel über Aussagenlogik ist viel länger als die anderen Abschnitte, weil dieser Teil häufig stiefmütterlich behandelt wird und er aber in meinen Augen unverzichtbar für das Verständnis der ökonomischen Theorien ist. Dieser Abschnitt enthält sogar kleinere Übungsaufgaben mit Musterlösungen. Die Abschnitte zu Summen- und Produkten sowie Statistik und Analysis fassen nur sehr knapp zusammen, was wir aus diesen Teilgebieten benötigen.

Es gibt eine Vielzahl von Büchern, die hier empfehlenswert sind. An erster Stelle kommt sicherlich Knut Sydsaeter und Peter Hammond<sup>1</sup>. Ich kann aber auch Frank Riedel und Philipp Wiechardt<sup>2</sup> empfehlen, weil dort zum einen viele Beweise abgedruckt sind und die Autoren besonderen Wert darauf legen, jeden mathematischen Satz mit einem ökonomischen Beispiel zu hinterlegen.

Büchern werden inzwischen mehr und mehr von Lernvideos auf youtube abgelöst. Mein Favorit ist hier [Grant Sanderson alias 3Blue1Brown](#)<sup>3</sup>, dessen kurze Clips (typischerweise um die 15 Minuten) sich immer einem konkreten Thema (Determinante, Ableitung usw.) widmen, sehr professionell gemacht sind und oft einen völlig neuen Blick auf das Thema ermöglichen. Die Clips wenden sich vermutlich eher an Studentinnen der Mathematik und Physik, es lohnt sich aber Teile davon anzuschauen. Ich verweise in einzelnen Kapiteln auf konkrete Videos.

Wenn Sie Anregungen oder Anmerkungen zu diesem Skript haben, [schicken Sie mir bitte eine E-Mail an AL@wacc.de](mailto:AL@wacc.de).

## 2 Schreibweisen, Mengenlehre

Für einen Studenten der Wirtschaftswissenschaften stellen mathematische Texte zu oft eine fast unüberwindbare Hürde dar. Nicht selten scheitert der Versuch, eine formale Ausarbeitung zu lesen, an einfachen Symbolen, die in der Mathematik nahezu selbstverständlich verwendet werden und die man in der Ökonomie noch nie gesehen hat. Die folgende Liste soll es Ihnen erleichtern, beim Lesen eines mathematischen Textes nicht gleich an einfachsten

<sup>1</sup> *Mathematik für Wirtschaftswissenschaftler. Basiswissen mit Praxisbezug (Taschenbuch)*, bei amazon für ca. 32€.

<sup>2</sup> *Mathematik für Ökonomen*, bei amazon ca 20€.

<sup>3</sup> Dieser Kanal hat 2021 über 4 Millionen Abonnenten. . .

Symbolen zu verzweifeln.

Statt einer Maximumfunktion schreibt man

$$(x - K)^+ = \max(x - K, 0).$$

Eine so genannte Indikatorfunktion ist eine Funktion, die nur zwei Werte aufweist: 1 oder 0. Die im Index angegebene Menge oder Bedingung beschreibt dann, wann sich der höhere und wann sich der niedrigere Wert ergibt:

$$1_{x \in A} = \begin{cases} 1 & \text{wenn } x \in A \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Natürlich sind statt  $x \in A$  viele andere Bedingungen möglich.

Wir werden in den Vorlesungen nur sehr selten auf Fragen der Mengentheorie zurückgreifen. Dennoch wollen wir in diesem Abschnitt einige Aussagen zur Mengenlehre wiedergeben, weil sie als Basis jeder formalen Darstellung gelten. Unter einer Menge versteht man eine Zusammenstellung diverser Objekte. Wenn man eine Menge beschreiben will, so muss man deren Elemente angeben. Dies geschieht typischerweise in geschwungenen Klammern, wobei hinter einem Doppelpunkt oder einem senkrechten Strich die Elemente beschrieben werden. Die folgende Menge enthält diejenigen reellen Zahlen, die eine bestimmte Ungleichung erfüllen

$$\{x : a \cdot x + b \cdot x^2 \geq 0\} = \{x \mid a \cdot x + b \cdot x^2 \geq 0\}$$

Für Intervalle reeller Zahlen existieren besondere Schreibweisen. Das abgeschlossene Intervall  $[a, b]$  enthält alle Zahlen zwischen  $a$  und  $b$  sowie die beiden Randpunkte. Das offene Intervall  $(a, b)$  enthält die Randpunkte dagegen nicht.<sup>4</sup> Von einem halboffenen Intervall spricht man, wenn nur einer der Ränder im Intervall enthalten ist; im Fall von  $(a, b]$  wäre dies beispielsweise der Punkt  $b$ , nicht aber der Punkt  $a$ .

<sup>4</sup> Hier sind unterschiedliche Schreibweisen möglich. Manchmal werden offene Intervalle mit  $]a, b[$  bezeichnet.

Die Menge der reellen Zahlen wird mit  $\mathbb{R}$  abgekürzt, die Menge der natürlichen Zahlen mit  $\mathbb{N}$  (die Null zählt üblicherweise zu den natürlichen Zahlen), die Menge der ganzen Zahlen (also der positiven und negativen natürlichen Zahlen) mit  $\mathbb{Z}$  und die Menge der rationalen Zahlen (also der Brüche) mit  $\mathbb{Q}$ .

Wir wollen hier die Menge der Ergebnisse eines Wurfes mit einem Würfel notieren. Diese Menge soll  $W$  heißen und man schreibt dann

$$W = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}.$$

Die Tatsache, dass die Zahl '6' beispielsweise Element dieser Menge ist, schreibt man auch als  $6 \in W$ . Will man nur geradzahlige Augen betrachten, so bezeichnen wir diese Menge mit  $W^g$ , die Menge der ungeradzahligen Augen sei  $W^u$ :

$$W^g = \{2, 4, 6\}, \quad W^u = \{1, 3, 5\},$$

Die leere Menge  $\emptyset$  enthält keine Elemente.

Mit Mengen sind folgende Operationen möglich: Vereinigung, Durchschnitt und Komplement. Darunter versteht man folgendes.

Die *Vereinigung* zweier Mengen ist diejenige Menge, die alle Elemente der beiden zu vereinigenden Mengen enthält. Das Symbol, mit dem man die Vereinigung kennzeichnet, schreibt man  $\cup$ . Es gilt also beispielsweise

$$W = W^g \cup W^u.$$

Der *Durchschnitt* zweier Mengen ist diejenige Menge, die sowohl in der einen als auch der anderen Menge enthalten sind. Das Symbol, mit dem man den Durchschnitt kennzeichnet, schreibt man  $\cap$ . Es gilt also beispielsweise

$$\emptyset = W^g \cap W^u.$$

Mengen, deren Durchschnitt leer ist, bezeichnet man auch als disjunkt.

Konzentrieren wir uns auf eine Menge  $A$ . Unter einer Teilmenge von  $A$  verstehen wir eine Menge  $B$ , die nur Elemente aus  $A$  enthält. Dabei wird offen gelassen, ob dies alle oder nur einige Elemente sind. Man schreibt kürzer  $B \subset A$ . Für Teilmenge  $B$  von  $A$  gilt immer

$$B \cup A = A, \quad \text{und} \quad B \cap A = B,$$

diese Beziehung charakterisiert Teilmengen.

Die *Differenz*  $A \setminus B$  zweier Mengen ist diejenige Menge, die alle Elemente aus  $A$  enthält, die nicht in  $B$  liegen. Für die Differenz gelten eine Reihe von Rechenregeln, die an die Aussagenlogik erinnern.<sup>5</sup>  $A, B$  und  $C$  seien Teilmengen einer Menge  $W$ , dann gilt

$$\begin{aligned} C \setminus (A \cap B) &= (C \setminus A) \cup (C \setminus B) \\ C \setminus (A \cup B) &= (C \setminus A) \cap (C \setminus B) \\ W \setminus (W \setminus A) &= A \end{aligned}$$

Man macht sich diese Rechenregeln am besten klar, indem man die so genannten Venn-Diagramme zeichnet. Darunter versteht man einfache symbolische Darstellungen, bei denen die Mengen immer durch Ellipsen beschrieben sind.

Die Darstellung einer Menge durch ein Venn-Diagramm ist didaktisch etwas ungeschickt. Dazu ein Beispiel. Oben hatten wir in einem Fall die Menge  $W$  dadurch beschrieben, dass sie alle Zahlen von 1 bis 6 enthält. Daher müsste man die Menge  $W$  auch durch die Auflistung dieser Zahlen abbilden, siehe *Abbildung 1*. Bei einem Venn-Diagramm wird nun diese Aufzählung durch eine imaginäre Ellipse begrenzt. Schlimmer noch, die Elemente, die ja die Menge bilden, treten in den Hintergrund (deshalb sind sie in der Abbildung auch grau dargestellt) – es erscheint nur noch die Grenze als Symbol für eine Menge. Unsere Menge  $W$  wird im Venn-Diagramm nur noch durch die Ellipse illustriert. Im Übrigen könnten wir statt einer Ellipse auch ein Rechteck, einen Kreis oder irgend eine andere geometrische Form wählen, denn diese

<sup>5</sup> Die Rechenregeln sind nicht immer übersichtlich. Eine einfache Eselsbrücke besagt, dass beim Ausklammern der Differenz  $\setminus$  die Symbole  $\cap$  und  $\cup$  vertauscht werden.



Abbildung 1: Venn-Diagramm der Menge  $W$ .

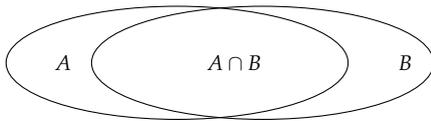


Abbildung 2: Darstellung von Durchschnitt (in der Mitte) und Vereinigung (beide Ellipsen).

konkrete Form ist nebensächlich. Ungeachtet dieser anschaulichen Schwierigkeiten werden wir an der Venn-Darstellung festhalten, weil es sich in der Mathematik eingebürgert hat.

Mit Venn-Diagrammen illustriert man dann die Aussagen zu Vereinigung, Durchschnitt oder Komplement, siehe etwa Abbildung 2.

Aus der Zeichnung geht hervor, dass beispielsweise die Menge  $A \cap B$  (der innere Teil beider Ellipsen) eine Teilmenge von  $A \cup B$  (die Gesamtheit beider Ellipsen) darstellt, also  $A \cap B \subset A \cup B$ .

Weiterhin gilt für die Schreibweise folgende Regel, die sich an die Schreibweisen der Arithmetik anlehnt: Strichoperation geht vor Vereinigung und Durchschnitt. Demzufolge kann man Klammern, die eine Differenz einschließen, weglassen. Zum Beispiel:

$$(A \setminus B) \cap C \equiv A \setminus B \cap C.$$

Leider kann diese verkürzte Schreibweise zu Irritationen führen. Schauen wir dazu auf den gerade notierten Term und betrachten ebenfalls die Menge  $A \setminus (B \cap C)$ . Letztere Menge unterscheidet sich von der oben stehenden in einem kleinen, aber nicht zu vernachlässigenden Teil. Um dies zu verstehen, haben wir beide Mengen in Venn-Diagrammen in Abbildung 3 genauer dargestellt. Man erkennt, dass diejenigen Elemente von  $A$ , die nicht in  $C$  liegen, im Ergebnis  $A \setminus B \cap C$  enthalten sind, aber nicht zu  $A \setminus (B \cap C)$  gehören.<sup>6</sup>

<sup>6</sup> Man muss hier ebenso vorsichtig sein wie in der Arithmetik. Dort bedeutet  $1/2 + 3$  auch etwas anderes als  $1/(2 + 3)$ .

Bildet man die Differenz  $W \setminus A$ , wobei  $W$  die Ausgangsmenge aller Elemente darstellt, so nennt man das Ergebnis auch *Komplement von A* und schreibt einfacher  $A^c$ .

Von Bedeutung sind manchmal auch die unendlichen Operationen der Vereinigung und des Durchschnittes. Darunter versteht man folgendes. Nehmen wir an, dass eine unendliche Folge von Mengen  $A_1, A_2, \dots$  existiert. Die unendliche Vereinigung

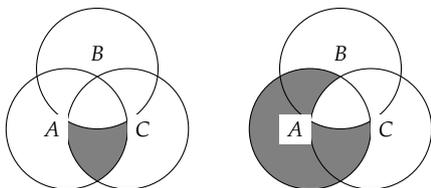


Abbildung 3: Zum Unterschied von  $A \setminus B \cap C$  (links) und  $A \setminus (B \cap C)$  (rechts).

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$$

ist diejenige Menge, die sämtliche Elemente aus den einzelnen Mengen  $A_n$  enthält. Ebenso ist der Durchschnitt

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$$

diejenige Menge, die nur diejenigen Elemente enthält, die in allen Mengen  $A_n$  zu finden sind.

Zum Beispiel gilt für die Menge der natürlichen Zahlen

$$\mathbb{N} = \bigcup_{n=0}^{\infty} \{n\},$$

weil die unendliche Vereinigung gerade alle natürlichen Zahlen umfasst (manchmal gibt es Streit über die Frage, ob die Null eine natürliche Zahl ist – dies nehmen wir hier an). Ebenso ist

$$\emptyset = \bigcap_{n=0}^{\infty} [n, \infty),$$

denn ein Element, dass in allen halboffenen Intervalle  $[n, \infty)$  liegen soll, muss ja größer als jede natürliche Zahl  $n$  sein – und eine solche Zahl existiert nicht.<sup>7</sup>

### 3 Aussagenlogik

#### 3.1 Grundbegriffe

Eine Theorie besteht aus folgenden Elementen:

**ANNAHMEN** (auch Axiome genannt). Annahmen sind Aussagen, deren Wahrheitsgehalt in der Theorie vollkommen unbestritten ist. Axiome sind immer wahr. So geht man im CAPM beispielsweise davon aus, dass die Investoren ein ganz bestimmtes Verhalten aufweisen.

Annahmen bzw. Axiome sind häufig so formuliert, dass ein unmittelbarer empirischer Test nicht so einfach möglich ist.

**DEFINITIONEN** Definitionen führen einen Begriff auf andere Begriffe zurück. Sie sind daher immer wahre Aussagen. Bezüglich einer Definition (wie auch bei Annahmen) kann man nur davon sprechen, dass sie zweckmäßig oder unzweckmäßig ist.

**THEOREM** (auch Satz, Proposition, Lemma, Korollar). Dies sind Aussagen, deren Wahrheitsgehalt sich aus Annahmen ergibt. Wenn also Annahme A erfüllt ist, dann gilt auch Theorem T.

Wenn es ein zentrales Theorem in einer Theorie gibt, so nennt man kleine (nicht so bedeutende) Aussagen *vor* dem Beweis des Theorems »Lemma«, kleine Aussagen *nach* dem Beweis des Theorems »Korollar«. Proposition, Satz und Theorem sind Synonyme.

**BEWEISE** Sie dienen dazu, aus Axiomen mit logischen Schlüssen Theoreme zu beweisen. Sie enden häufig mit speziellen Zeichen (beispielsweise einem ausgefüllten Viereck ■) oder den Abkürzungen w.z.b.w. (*was zu beweisen war*) sowie q.e.d. (*quod erat demonstrandum*).

Die klassische (Newtonsche) Mechanik soll uns hier als Beispiel dienen. Ausgangspunkt dieser Theorie sind die so genannten *Newtonschen Axiome*, in denen Isaac Newton mehrere Aussagen über den Zusammenhang von Kraft, Masse und Beschleunigung beschreibt. Der Begriff der Geschwindigkeit wird in der Theorie aufbauend auf der Beschleunigung *definiert*: Geschwindigkeit ist die erste Ableitung der Beschleunigung. Die Aussage zur Impulserhaltung stellt ein *Theorem* dar: Ohne Krafteinwirkung bleibt die Geschwindigkeit konstant. Dieses Theorem wird konkret aus dem zweiten Newtonschen Axiom (auch Aktionsprinzip genannt) abgeleitet.

Studenten der Ökonomie neigen (vor allem in Diplom-, Master- und Seminararbeiten) dazu, die Bedeutung von Annahmen und

<sup>7</sup> Das Objekt  $\infty$  ist keine Zahl, weil man damit nicht rechnen kann. Beispielsweise gilt  $1 + \infty = \infty$ , woraus  $1 = 0$  folgen würde?!

Theoremen falsch einzuschätzen. Der letztendliche Sinn einer ökonomischen Theorie besteht darin, beobachtbares Verhalten zu erklären. Zum Beispiel möchte man erklären, warum Preissteigerungen dazu führen, dass die Nachfrage nach diesem Gut sinkt. Zu diesem Zweck formuliert man eine Theorie mit entsprechenden Annahmen. Die Leistungsfähigkeit dieser Theorie leitet sich nun gerade *nicht* aus der Tatsache ab, dass diese Annahmen besonders realistisch sind. Gerade das Gegenteil ist der Fall: Würde man mit realistischen Annahmen beginnen, so müssten ja alle Umstände, die mit Investitionsprojekten zu tun haben, Erwähnung finden und man würde sich in endlosen Details verlieren – vermutlich zudem ohne ernsthafte Chancen, das gewünschte Ergebnis zu erhalten.<sup>8</sup> In einer Theorie muss man vielmehr abstrahieren, Details ausblenden und sich auf das Wesentliche konzentrieren. Die Stärke einer Theorie sind also nicht die realistischen Annahmen, die in ihr unterstellt werden – eine gute Theorie zeichnet sich vielmehr darin aus, dass sie in der Lage ist, die interessierenden Sachverhalte *als Theoreme herzuleiten*. Und das ist etwas völlig anderes. Beachten Sie bitte diese Regel und ersparen sich und uns den typischen ersten Satz in jedem Würdigungskapitel, der da lautet »Die Annahmen dieses Modells werden als zu unrealistisch kritisiert.« Zweckmäßig gewählte Annahmen sind abstrakt und damit immer unrealistisch.<sup>9</sup>

<sup>8</sup> Es gibt sicherlich eine Reihe von Produkten, die, wenn besonders billig angeboten, den potentiellen Kunden als Fälschung erscheinen und dann gerade nicht nachgefragt werden. Denken Sie an hochwertige Uhren oder Mode.

<sup>9</sup> Diesen Gedanken hat Milton Friedman in seiner Arbeit *The Methodology of Positive Economics* (Essays In Positive Economics, Chicago: Univ. of Chicago Press, 1966), S. 3-16, 30-43 ausführlich dargelegt.

### 3.2 Logische Verknüpfungen

Die Aussagenlogik beschäftigt sich mit Aussagen. Dies sind Formulierungen, die entweder wahr oder falsch sein können – ein dritter Wert ist nicht möglich. Solche Aussagen werden nun mit logischen Verknüpfungen zu neuen Aussagen kombiniert.

Es gibt fünf logische Verknüpfungen, um aus bestehenden Aussagen neue Aussagen zu erhalten. Dabei handelt es sich ausschließlich um eine formale Zusammenfügung, es geht nur um den Wahrheitsgehalt der verknüpften Aussage. Nirgendwo in der Aussagenlogik wird auf den inneren Bezug der verknüpften Aussagen Bezug genommen; erst Recht nicht interessiert, ob es sich um sinnvolle Aussagen handelt. Die Aussagenlogik prüft nur, ob die Aussagen wahr oder falsch sind, nicht aber, ob sie vernünftig sind.

Im folgenden sollen  $A$  und  $B$  zwei Aussagen sein. Beispiele für solche Aussagen sind etwa

$$A : x \text{ ist eine ganze Zahl}, \quad B : x \text{ ist größer als } 5.$$

Die fünf Verknüpfungen sind dann

**VERNEINUNG** Man schreibt hierfür häufiger  $\neg A$ .

Wenn eine Aussage  $A$  wahr ist, dann ist  $\neg A$  falsch und umgekehrt.

**ODER** Man schreibt hierfür auch  $A \vee B$ .

Wenn eine der beiden Aussagen  $A$  oder  $B$  wahr ist, dann ist  $A \vee B$  wahr. Insbesondere ist  $A \vee B$  auch dann wahr, wenn

beide Aussagen wahr sind. Beachten Sie, dass es sich beim aussagenlogischen Oder nicht um ein entweder-oder handelt! Bei einem entweder-oder wäre sicherzustellen, dass genau eine der beiden Teilaussagen korrekt ist.

UND Man schreibt hierfür auch  $A \wedge B$ .

Nur dann, wenn beiden Aussagen  $A$  und  $B$  wahr sind, ist  $A \wedge B$  wahr.

IMPLIKATION Man schreibt hierfür auch  $A \rightarrow B$  und sagt auch *wenn  $A$ , dann  $B$* .

Die Implikation ist wahr, wenn

- die Aussage  $A$  falsch ist oder
- die Aussage  $A$  wahr und die Aussage  $B$  wahr ist.

Anfänger irritiert immer der erste Spiegelstrich: eine Implikation ist auch dann wahr, wenn der Ausgangspunkt selbst logisch falsch ist. Eine Aussage der Form *Wenn es auf dem Mond Wasser gibt, dann leben wir unendlich lange* ist also logisch richtig (und sicherlich unsinnig)!

Dies hat damit zu tun, weil wir nur prüfen, ob man aus wahren Aussagen korrekte Schlussfolgerungen getroffen hat. Was mit falschen Aussagen geschieht, interessiert in der Aussagenlogik nicht. Insofern unterscheidet sich die Implikation von einem Beweisverfahren, dem logischen Schluss: Dort darf man nur von Aussagen  $A$  ausgehen, die wahr sind. Bei der Aussagenlogik kann man aber alle möglichen Aussagen verknüpfen und daher auch aus falschen Aussagen (sinnlose) Schlüsse ziehen.

ÄQUIVALENZ Man schreibt hierfür  $A \leftrightarrow B$  und sagt auch  *$A$  genau dann, wenn  $B$* . In der englischen Literatur ist es üblich, dafür  *$A$  if and only if  $B$*  oder noch kürzer  *$A$  iff  $B$*  zu schreiben.

Die Äquivalenz ist wahr, wenn entweder beide Aussagen gleichzeitig wahr oder beide gleichzeitig falsch sind.

Die bisherigen Überlegungen pflegt man in Tabellenform zu notieren. Die Tabellen beschreiben den Wahrheitsgehalt der verknüpften Aussagen. Die Negation und die anderen Verknüpfungen lassen sich so übersichtlich darstellen (die linken Spalten geben den Wahrheitsgehalt von  $A$  und  $B$  an, siehe dazu Abbildung 4).

Noch ein Hinweis zur Schreibweise. In der Aussagenlogik bemüht man sich, nicht notwendige Klammern wegzulassen. Das Negationszeichen bezieht sich dabei immer, wenn keine Klammern vorhanden sind, nur auf die unmittelbar nachfolgende Aussage. Sie müssen also die Aussagen  $\neg A \vee B$  (*nicht  $A$  oder  $B$* ) von der Aussage  $\neg(A \vee B)$  (Negation von ( *$A$  oder  $B$* )) unterscheiden.

**AUFGABE 3.1** Zeigen Sie, dass die logischen Verknüpfungen  $A \rightarrow B$  und  $\neg A \vee B$  identische Wahrheitstabellen aufweisen, also logisch äquivalent sind.

$A$	$\neg A$
W	F
F	W

$A$	$B$	$A \vee B$
W	W	W
W	F	W
F	W	W
F	F	F

$A$	$B$	$A \wedge B$
W	W	W
W	F	F
F	W	F
F	F	F

$A$	$B$	$A \rightarrow B$
W	W	W
W	F	F
F	W	W
F	F	W

$A$	$B$	$A \leftrightarrow B$
W	W	W
W	F	F
F	W	F
F	F	W

Abbildung 4: Verknüpfungen in der Aussagenlogik.

**AUFGABE 3.2** *Beweisen Sie, dass die Verknüpfungen  $(A \rightarrow B) \wedge (B \rightarrow A)$  und  $A \leftrightarrow B$  identische Wahrheitstabellen aufweisen, also logisch äquivalent sind.*

**AUFGABE 3.3** *Beweisen Sie, dass die Verknüpfungen  $A \rightarrow B$  und  $\neg B \rightarrow \neg A$  identische Wahrheitstabellen aufweisen, also logisch äquivalent sind. (Diese Aussage nutzt man beim so genannten indirekten Beweis aus, mehr dazu in den Lösungshinweisen.)*

### 3.3 Quantoren

Es gibt Aussagen, die von einer Variablen abhängig sind. Ein Beispiel einer solchen Aussage ist etwa  $2x$  ist eine ganze Zahl. Je nachdem, welchen Wert  $x$  annimmt, wird  $A$  wahr oder falsch. Eine solche Aussage würden wir mit  $A(x)$  bezeichnen.

Soll nun diese Aussage nicht nur für ein bestimmtes  $x$ , sondern für alle  $x$  gelten, so schreibt man kürzer  $\forall x A(x)$ . Wenn  $x$  aus der Menge  $B$  entstammt, schreibt man präziser  $\forall x \in B A(x)$ . Wenn  $x$  nur die natürlichen Zahlen umfasst, schreibt man beispielsweise  $\forall x \in \mathbb{N} A(x)$ . Handelt es sich bei der Menge  $B$  dagegen um die reellen Zahlen, so wird  $\forall x \in \mathbb{R} A(x)$  notiert.

Soll dagegen diese Aussagen nicht für alle  $x$ , sondern mindestens für ein  $x$  gelten, so schreibt man kürzer  $\exists x A(x)$ . Wenn  $x$  aus der Menge  $B$  entstammt, schreibt man präziser  $\exists x \in B A(x)$ .

$\exists$  und  $\forall$  heißen Quantoren.

**AUFGABE 3.4** *Betrachten Sie die Aussage Rote Autos sind schnell.*

*Nehmen Sie an, dass die Aussagen*

- $x$  ist ein rotes Auto durch  $R(x)$  und
- $x$  ist ein schnelles Auto durch  $S(x)$

*beschrieben werden. Notieren Sie unter Zuhilfenahme von Quantoren, logischen Verknüpfungen und  $R(x), S(x)$  unsere eben beschriebene Aussage.*

**AUFGABE 3.5** *Betrachten Sie die Aussage Jede natürliche Zahl hat einen Nachfolger, der größer als sie ist.*

*Nehmen Sie an, dass die Aussagen*

- $x$  ist eine natürliche Zahl durch  $N(x)$  und
- $y$  ist Nachfolger von  $x$  durch  $Nf(x,y)$

*beschrieben werden. Formulieren Sie unter Zuhilfenahme von Quantoren, logischen Verknüpfungen, der Relation  $y > x$  und  $N(x), Nf(x,y)$  unsere eben beschriebene Aussage.*

### 3.4 Rechenregeln

Aus den Tabellen für logische Operatoren können wir eine Reihe von Rechenregeln bestätigen. Betrachten wir dazu beispielsweise

die Negation der Aussage  $A \vee B$ : Betrachtet man die Tabellen genauer, so erkennt man die Identität

$$\neg(A \vee B) \iff \neg A \wedge \neg B.$$

Dazu betrachten wir am besten ein Beispiel. Wir konzentrieren uns auf zwei Aussagen

AUSSAGE A LAUTET Das Auto ist rot.

AUSSAGE B LAUTET Das Auto ist schnell.

$A \vee B$  ist dann gleichbedeutend mit *Das Auto ist rot oder schnell*.

Wollen wir diese Aussage verneinen, so können wir also zum einen schreiben *Das Auto kann nicht rot oder schnell sein* (formal  $\neg(A \vee B)$ ) oder aber wir schreiben *Das Auto ist nicht rot und nicht schnell* (formal  $\neg A \wedge \neg B$ ). Beide Aussagen sind logisch gleichwertig. In einem Fall bezieht sich die Negation auf eine (mit oder) verknüpfte Aussage, im anderen Fall bezieht sich die Negation auf die Einzelaussagen  $A$  und  $B$ . Unsere alltägliche Schreibweise hat allerdings den Nachteil, dass nicht ohne weitere die formale Präzision erkennbar ist, die der aussagenlogischen Schreibweise innewohnt.<sup>10</sup>

Ebenso gilt

$$\neg(A \wedge B) \iff \neg A \vee \neg B.$$

Am besten merkt man sich beide Regeln wie folgt: Die Negation macht aus *oder* ein *und* und aus *und* ein *oder*.

Zwei Rechenregeln für Quantoren sind für uns wichtig. Wenn die Negation hinter die Operatoren gezogen werden soll, ändern sie sich nach folgenden Regeln

$$\neg \forall x A(x) \iff \exists x \neg A(x)$$

und

$$\neg \exists x A(x) \iff \forall x \neg A(x)$$

Wir merken uns einfach, dass die Negation die beiden Quantoren ineinander überführt: Aus *für alle* wird *es gibt ein*, aus *es gibt ein* wird *für alle*.

Dazu notieren wir am besten wieder ein Beispiel.  $A(x)$  sei die Aussage  *$x$  ist eine gerade Zahl*,  $B$  sei die Menge der natürlichen Zahlen, auch mit  $\mathbb{N}$  bezeichnet. Dann betrachten wir

$$\forall x \in \mathbb{N} A(x)$$

und stellen fest, dass diese Aussage falsch ist: nicht alle natürlichen Zahlen sind gerade! Wenn diese Aussage falsch ist, muss ihre Negation wahr sein. Die Negation lautet

$$\neg \forall x \in \mathbb{N} A(x) \iff \exists x \in \mathbb{N} \neg A(x)$$

und in der Tat: Es gibt (wenigstens) eine natürliche Zahl, die nicht gerade ist, etwa  $x = 3$ .

<sup>10</sup> Oder können Sie sofort erkennen, von welcher aussagenlogischen Form die Behauptung *Was nicht rot ist, muss schnell sein* ist? (Es handelt sich um die Implikation  $\neg A \rightarrow B$ ).

AUFGABE 3.6 Verneinen Sie die Aussage der Aufgabe 3.4 und vereinfachen Sie den Ausdruck so lange, bis nur noch  $\neg R(x)$  und  $\neg S(x)$  auftauchen.

AUFGABE 3.7 Verneinen Sie die Aussage der Aufgabe 3.5 und vereinfachen Sie den Ausdruck so lange, bis nur noch  $\neg N(x)$  und  $\neg Nf(x,y)$  auftauchen.

### 3.5 Weiterführende Links

Sie finden auf der [Webseite der Universität Tübingen](#) Aufzeichnungen von Vorlesungen zur Aussagenlogik. Lesenswert sind auch [Peter Subers Anmerkungen](#) zur Übersetzung von Alltagsenglisch in formallogische Aussagen. Die englische Wikipedia (Eintrag [logic](#)) verweist auf mehrere Webseiten mit Übungen zur Aussagenlogik.

Die Links finden Sie in der PDF-Datei auf dem Netz: [www.andreasloeffler.de](http://www.andreasloeffler.de), unter »Lehre«.

## 4 Summen und Produkte

### 4.1 Symbole

Liegen Zahlen  $a_1, a_2, \dots$  in einer sortierten Reihenfolge vor, so spricht man von Folgen. Diese Folgen kann man summieren oder miteinander multiplizieren. Das Summen- und das Produktzeichen beschreiben eine solche Summe oder ein solches Produkt kompakter. So schreibt man:

$$\sum_{s=1}^T a_s = a_1 + a_2 + \dots + a_T.$$

Die Variable  $s$  heißt Laufindex, sie erscheint unter dem Summenzeichen und gleichzeitig beim Summanden  $a_s$ . Es spielt keine Rolle, welches Symbol (also  $s, t, \dots$ ) man hier verwendet, sofern es beim Summenzeichen und Summanden immer identisch verwendet wird.

Wenn klar ist, über welche Grenzen summiert wird, findet sich folgende verkürzte Schreibweise:

$$\sum_s a_s.$$

Analog ist das Produktzeichen zu lesen:

$$\prod_{s=1}^T a_s = a_1 \cdot a_2 \cdot \dots \cdot a_T.$$

Summen können zusammengefasst werden (»Distributivgesetz«). Daher gelten die folgende Regeln:

$$\sum_{s=1}^T a_s + \sum_{s=1}^T b_s = \sum_{s=1}^T (a_s + b_s).$$

Beachten Sie, dass man oft die hintere Klammer weglässt, so dass diese Regel im Extremfall wie folgt notiert werden könnte:

$$\sum_s a_s + \sum_s b_s = \sum_s a_s + b_s.$$

Analoge Aussagen gelten zum Produkt.

Ebenso kann man Produkte mit Summen ausklammern und zusammenfassen (Klammern werden hier typischerweise weggelassen):

$$a \cdot \sum_{s=1}^T a_s = \sum_{s=1}^T a \cdot a_s.$$

Wichtig sind noch Fälle, in denen Doppelsummen auftreten. Betrachten Sie dazu eine Folge  $a_{s,t}$ , die von zwei Parametern  $s$  und  $t$  abhängt. Es wird über beide Parameter summiert und dabei ist die Reihenfolge der Summation unwesentlich (»Kommutativgesetz«)

$$\sum_{s=1}^T \sum_{t=1}^S a_{s,t} = \sum_{t=1}^T \sum_{s=1}^S a_{s,t}.$$

Sie können sich vorstellen, dass man auch hier gern die verkürzte Schreibweise wählt, im schlimmsten Fall wird statt der Doppelsumme nur das Symbol  $\sum_{s,r}$  notiert.

Schwieriger wird der Fall der Doppelsummen, wenn der Endindex (oben  $S$  oder  $T$ ) vom Laufindex der ersten Summe selbst abhängt. Dies ist beispielsweise bei der Summe

$$\sum_{s=1}^S \sum_{t=1}^s a_{s,t}$$

der Fall. Jetzt darf man die Summen nicht ohne weiteres vertauschen, weil man ja bei  $t$  wissen muss, wie weit man summieren soll: Die Grenze  $s$  verliert ihren Sinn, wenn man einfach die Summenzeichen vertauscht! Wie hier vorzugehen ist, klären wir am konkreten Fall in den Vorlesungen.

Eher selten gibt es Fälle, in denen nicht über alle Elemente einer Folge summiert werden soll. Beispielsweise möchte man nur diejenigen  $a_s$  summieren, die einen geraden Index (also  $s = 2, 4, \dots$ ) aufweisen. Das schreibt man ausführlich bzw. verkürzt wie folgt

$$\sum_{\substack{s=1, \\ s \text{ gerade}}}^T a_s = \sum_{s \text{ gerade}} a_s.$$

#### 4.2 *Arithmetisches, geometrisches und harmonisches Mittel*

Wenn eine (endliche) Folge von Zahlen  $a_s$  (mit  $s = 1, \dots, t$ ) untersucht werden soll, ist es häufig notwendig einen Durchschnitt oder Mittelwert zu bilden. Es gibt deren mindestens drei: Arithmetisches, geometrisches und harmonisches Mittel.<sup>11</sup> Auf diese wollen wir hier eingehen.

Unter dem arithmetischen Mittel der Reihe versteht man den Durchschnitt, der bei Addition aller Folgeelemente und Division durch deren Anzahl entsteht

$$\text{Arithm. Mittel} = \sum_{s=1}^t \frac{a_s}{t}.$$

<sup>11</sup> Die einheitliche Verwendung des Begriffes "Mittel" legt nahe, dass es sich um spezielle Formen ein und derselben Größe handelt. Das ist auch tatsächlich der Fall. Kolmogorov hat für "den Mittelwert" ein überzeugendes Axiomensystem angegeben, aus denen man drei Spezialfälle (eben das arithmetische, geometrische und harmonische Mittel) herleiten kann. Da die Originalarbeit in französisch ist, sei hier auf Miguel de Carvalho: Mean, What do You Mean?, The American Statistician 70 (2016), S. 270-274 (doi://10.1080/00031305.2016.1148632) verwiesen.

Beim arithmetischen Mittel erzielen Ausreißer (sehr große oder sehr kleine Werte) eine starke Wirkung auf den Mittelwert.

Das geometrische Mittel spielt insbesondere in der Zinseszinsrechnung eine wichtige Rolle. Es kann nur angewandt werden, wenn die Folgeelemente alle positiv sind. Dann ist es definiert als

$$\text{Geomet. Mittel} = \sqrt[t]{\prod_{s=1}^t a_s}.$$

Das harmonische Mittel wendet man an, wenn man Durchschnitte von Risikoaversionen bildet. Auch hier müssen die Folgeelemente positiv sein. Dann ist es definiert als

$$\text{Harm. Mittel} = \frac{t}{\sum_{s=1}^t \frac{1}{a_s}}.$$

Das harmonische Mittel wird durch Ausreißer nach oben sehr wenig beeinflusst. Hinzu kommt: Wenn nur ein einziger Folgenwert sehr nahe der Null ist, wird das harmonische Mittel ebenfalls sehr nahe der Null sein.

Die Durchschnitte sind identisch, wenn die Folge nur identische Elemente enthält. Es gilt in jedem Fall

$$\text{arithmet. Mittel} \geq \text{geometr. Mittel},$$

unabhängig davon, welche Werte die Folge enthält.

#### 4.3 Geometrische Reihe

Zuletzt soll auf geometrische Reihen eingegangen werden, die vor allem in der Investitionsrechnung häufig auftauchen. Dabei handelt es sich um eine Summe der Form

$$S := \sum_{t=1}^T q^t.$$

Man nennt eine solche Reihe "geometrisch", weil die einzelnen Summanden eine geometrische Folge bilden. Die Summe  $S$  lässt sich viel einfacher darstellen. Zu diesem Zweck multiplizieren wir den Ausdruck mit  $q$  und erhalten aus der Definition sofort

$$qS = \sum_{t=1}^T q^{t+1}.$$

Nun muss man sich klarmachen, dass die beiden letzten Gleichungen auf der rechten Seite nahezu identische Summanden aufweisen. Es gibt nur zwei Ausnahmen: In der ersten Summe taucht  $q^1$  auf, das sich in der zweiten Summe nicht findet. Und in der zweiten Summe taucht  $q^{T+1}$  auf, das wiederum in der ersten Summe nicht erscheint.

Nachdem wir uns diese verblüffende Erkenntnis zu eigen gemacht haben, können wir uns eines einfachen Tricks bedienen. Wir

subtrahieren die Gleichung für  $S$  von der Gleichung für  $qS$  und erhalten

$$qS - S = q^{T+1} - q^1 \implies S = \frac{q^{T+1} - q^1}{q - 1}.$$

Besonderes Interesse verdient der Fall  $T \rightarrow \infty$ . Dieser Grenzwert existiert nur dann, wenn für den Koeffizienten die Ungleichung  $|q| < 1$  erfüllt ist; anderenfalls divergiert die Summe (gegen unendlich).

Für  $|q| < 1$  dagegen wissen wir, dass der Ausdruck  $q^T$  für hohes  $T$  gegen Null geht. Damit erhalten wir

$$\sum_{t=1}^{\infty} q^t = \begin{cases} \frac{q}{1-q}, & \text{wenn } |q| < 1 \\ \infty, & \text{sonst.} \end{cases}$$

Damit wollen wir unsere Überlegungen zu geometrischen Reihen beenden.

**AUFGABE 4.1** Berechnen Sie das arithmetische und geometrische Mittel der beiden Zahlen  $a + b$  und  $a - b$ . Vergleichen Sie beide.

Berechnen Sie das arithmetische und geometrische Mittel der beiden Zahlen  $\frac{a}{b}$  und  $a \cdot b$  (beide Zahlen sind positiv). Vergleichen Sie beide.

**AUFGABE 4.2** Beweisen Sie durch vollständige Induktion die folgende Aussage

$$\sum_{n=1}^N n = \frac{N(N+1)}{2}. \quad (1)$$

**AUFGABE 4.3** Berechnen Sie unter Zuhilfenahme des vorigen Ergebnisses den Ausdruck

$$\sum_{\substack{n=1, \\ n \text{ gerade}}}^{2N} n \quad (2)$$

**AUFGABE 4.4** Multiplizieren Sie  $\left(\sum_{s=1}^4 a_s\right)^2$  aus.

**AUFGABE 4.5** Vereinfachen Sie

$$\ln \left( \prod_{s=1}^N a_s \right). \quad (3)$$

## 5 Matrizenrechnung und das Lösen von Gleichungssystemen

**Hinweis:** 3Blue1Brown hat eine sehr sehenswerte Reihe zu Vektoren, Matrizen, Matrixinversion und Determinanten (Link zur Playlist): [youtube.com/playlist?list=PLZHQObOWTQDPD3MizzM2xVFitgF8hE\\_ab](https://youtube.com/playlist?list=PLZHQObOWTQDPD3MizzM2xVFitgF8hE_ab).

Unter einer Matrix versteht man eine tabellarisch angeordnete Menge von Zahlen. Matrizen werden oft mit (deutschen) Großbuchstaben bezeichnet. Die Elemente in der Matrix werden oft mit

den entsprechenden Kleinbuchstaben und Indizes versehen, die sowohl die Zeilennummer als auch die Spaltennummer angeben. Beispielsweise ist

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

eine  $3 \times 3$ -Matrix.

Ein Vektor ist eine tabellarisch angeordnete Menge von Zahlen, wobei hier nur eine Spalte (oder eine Zeile) existiert. Beispielsweise ist

$$X = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ a_{31} \end{pmatrix}$$

ein  $3 \times 1$ -Vektor.

In der Matrizenrechnung sind die drei wichtigsten Operationen die Matrixmultiplikation, das Transponieren und das Invertieren. Wir werden jetzt auf alle drei Operationen eingehen.

<sup>12</sup> Damit Matrizen mit Vektoren multipliziert werden können, müssen die entsprechenden Spalten- bzw. Zeilenlängen identisch sein. Man kann eine  $3 \times 2$ -Matrix also (von rechts) mit einem  $2 \times 1$ -Vektor multiplizieren (weil die Zahl 2 bei der Matrix links und beim Vektor rechts auftaucht), nicht aber eine  $2 \times 3$ -Matrix mit einem  $2 \times 1$ -Vektor (weil die Zahl 3 bei der Matrix nicht identisch der Zahl 2 beim Vektor ist).

*Matrixmultiplikation* Wir wollen den oben notierten Vektor  $X$  mit der Matrix  $A$  multiplizieren.<sup>12</sup> Wir wollen zuerst an einem einfachen Beispiel einer  $2 \times 2$ -Matrix und eines  $2 \times 1$ -Vektor erläutern, wie eine solche Multiplikation abläuft, wir konzentrieren uns dabei auf den ersten Eintrag im Ergebnisvektor. Dazu bewegt man sowohl die erste Zeile der Matrix nach rechts und die erste (einzige) Spalte des Vektors nach unten. Einander begegnende Zahlen werden miteinander multipliziert und zum Zwischenergebnis addiert. In Abbildung 5 sieht man, wie diese Rechnung für das erste Element des neuen Vektors abläuft. Diese Technik kann man ebenfalls anwenden, wenn man Matrizen miteinander multipliziert.

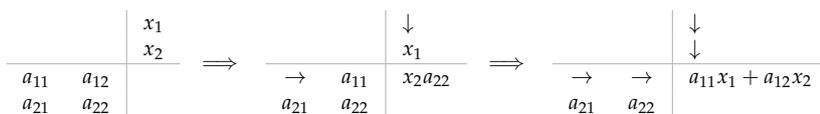


Abbildung 5: Multiplikation eines Vektors mit einer Matrix.

Will man allgemeiner eine Matrix beliebiger Größe mit einem Vektor multiplizieren, so erhält man erneut einen Vektor. Wenn die Ausgangsmatrix  $S$  Spalten aufweist, muss der Vektor ebenfalls  $S$  Spalten besitzen. Das Ergebnis ist dann ein Vektor mit  $S$  Zeilen mit den folgenden Einträgen:

$$(A \cdot X)_s = \sum_{r=1}^S A_{sr} X_r.$$

Dieses Ergebnis ist auch in Abbildung 5 dargestellt. Analog ergibt sich das Produkt aus zwei Matrizen

$$(A \cdot B)_{sr} = \sum_{t=1}^S A_{st} B_{tr}.$$

*Transponieren* Eine weitere Operation von Matrizen stellt das Transponieren (»versetzen«) dar. Das Transponieren wird durch ein hochgestelltes  $T$  abgebildet.<sup>13</sup> Dabei wird die Matrix entlang der Diagonale gespiegelt, so wie es in Abbildung 6 beschrieben ist.

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}^T \implies \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ a_{13} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

<sup>13</sup> Manchmal wird statt des  $T$  ein Strich verwendet, mit dem man Ableitungen kennzeichnet.

Abbildung 6: Transponieren einer Matrix.

*Invertieren einer Matrix/Lösung von Gleichungssystemen* Das Invertieren einer Matrix wird wichtig, wenn man sich klarmacht, dass Gleichungssysteme durch Matrixgleichungen dargestellt werden können. Betrachten Sie zu diesem Zweck das folgende  $2 \times 2$ -Gleichungssystem:<sup>14</sup>

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 &= b_2 \end{aligned} \quad (4)$$

<sup>14</sup> Man kann nur Matrizen invertieren, die ebenso viele Spalten wie Zeilen besitzen. Man spricht auch von quadratischen Matrizen.

mit beliebigen Zahlen  $a, b$ . Dieses Gleichungssystem kann man mit einer Gleichung, bestehend aus der Koeffizientenmatrix  $A$ , dem Variablenvektor  $X$  und dem Lösungsvektor  $B$  wie folgt darstellen:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}.$$

Die Lösung dieses Gleichungssystems beschreibt man nun ebenfalls durch eine Matrixgleichung

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}, \quad (5)$$

wobei die rechts dargestellte Matrix  $(\cdot)^{-1}$  die so genannte *invertierte Matrix von A* beschreibt. Wir wollen hier darauf eingehen, wann eine solche invertierte Matrix existiert und wie man sie im praktischen Beispiel bestimmt.

Es gibt zwei Bedingungen, die (wenn sie erfüllt sind) die Existenz einer invertierten Matrix sichern:

1. Die Determinante der Matrix  $A$  muss von Null verschieden sein.
2. Die Lösung des Gleichungssystems

$$A \cdot X = 0$$

enthält nur den Nullvektor  $X = 0$  und keinen anderen Wert.

Wir werden in den Vorlesungen von beiden Bedingungen Gebrauch machen. Beide sind logisch äquivalent.

Eine Matrixinversion gelingt am leichtesten mit MS Excel. Dazu geht man wie folgt vor. Zuerst notiert man in einem Arbeitsblatt die Matrix und den Vektor in übersichtlicher Schreibweise, wobei man sich sinnvollerweise an der tabellarischen Darstellung orientiert. Jede Zahl steht also in einer eigenen Zelle, wobei zuerst  $a_{11}$  und

dann rechts daneben  $a_{12}$  usw. notiert werden. Um nun die Matrix  $A$  zu invertieren, markiert man die Zellen, in die die invertierte Matrix geschrieben werden soll. Danach gibt man in eine beliebige Zelle des markierten Bereiches den folgenden Befehl ein:<sup>15</sup>

=MINV(A1:B2)

(wobei die Verweise auf die Zellen A1 : B2 durch den Zellenbezug ersetzt werden müssen, in dem sich die Matrix  $A$  befindet). Dieser Befehl darf nun nicht durch ein einfaches <Enter>, sondern er muss durch <Shift><Ctrl><Enter> abgeschlossen werden. Wenn die Matrix  $A$  invertierbar ist, so finden Sie nun an den markierten Stellen die Inverse von  $A$ .

Ebenso kann man übrigens die Multiplikation von Matrizen durch Excel vornehmen lassen. Man markiert den Bereich, in dem die Lösung stehen soll. Der in eine der markierten Zellen zu schreibende Befehl lautet

=MMULT(A1:B2;C1:C2)

(wobei wieder die richtigen Zellbezüge zu wählen sind – achten Sie auch darauf, dass die Dimensionen der beiden Matrizen zueinander passen). Wieder ist die Operation durch <Shift><CTRL><Enter> abzuschließen. Excel erlaubt, in der Ausgangsmatrix einzelnen Zellen zu ändern, eine inverse Matrix oder ein Matrizenprodukt wird dann entsprechend angepasst.

Achten Sie bei der Matrixmultiplikation darauf, dass das Ergebnis die entsprechende Dimension aufweist. Wenn Sie eine  $2 \times 2$ -Matrix (im Feld A1:B2 stehend) mit einem Vektor multiplizieren wollen, so muss es sich um einen Spaltenvektor<sup>16</sup> (beispielsweise in C1:C2 stehend) handeln; mit einem Zeilenvektor (der etwa in C1:D1 stehen könnte) ist die Matrixmultiplikation nicht möglich. Das Ergebnis ist dann wiederum ein Spaltenvektor – wenn Sie fälschlicherweise einen Zeilenvektor markieren, finden Sie dort keine sinnvollen Ergebnisse.

*Cramersche Regel  $2 \times 2$*  Die Cramersche Regel dient der Lösung von Gleichungssystemen.

**Hinweis:** 3Blue1Brown hat ein sehenswertes Video mit einer graphischen Veranschaulichung von Cramers Regel:  
[youtube.com/watch?v=jBsC34PxzoM](https://www.youtube.com/watch?v=jBsC34PxzoM).

Bei dem Gleichungssystem (4) (bzw. (5) in Matrixschreibweise) wird die Lösung durch eine Matrixinversion ermittelt. Ab und an ist dies unpraktisch und dann nutzt man die Cramersche Regel. Diese Regel und die Matrixinversion führen zu identischen Ergebnissen, nur die auszuführenden Rechenschritte sind andere.

Wir wollen die Cramersche Regel im  $2 \times 2$ -Fall erläutern, jeder andere Fall kann analog behandelt werden. Nach der Cramerschen Regel ergibt sich die Lösung  $x = (x_1, x_2)$  nach folgender Rechenre-

<sup>15</sup> Soll also beispielsweise eine  $2 \times 2$ -Matrix invertiert werden, so muss man an einer unbeschriebenen Stelle des Arbeitsblattes insgesamt in einem Quadrat vier Zellen ( $= 2 \times 2$ ) markieren.

<sup>16</sup> Streng genommen handelt es sich bei diesem Vektor um eine  $2 \times 1$ -Matrix.

gel, bei der Determinanten verwendet werden:

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}}, \quad x_2 = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}}$$

Man erkennt den Formalismus, dem die Cramersche Regel unterliegt, sehr deutlich. Jede Lösung  $x_s$  wird durch einen Bruch wiedergegeben, in dem sowohl im Zähler als auch im Nenner Determinanten von Matrizen stehen. Der Nenner ist immer der gleiche: Dort steht die Determinante der Koeffizientenmatrix  $A$ .

Der Zähler unterscheidet sich für jeden Wert  $x_s$ . Wieder geht man von der Koeffizientenmatrix  $A$  aus, ersetzt aber nun die  $s$ -te Spalte durch den Ergebnisvektor  $b$ . Dann wird die resultierende Determinante ermittelt. Der Bruch, der sich dann ergibt, entspricht genau der Lösung für  $x_s$ .

*Cramersche Regel  $3 \times 3$*  Natürlich kann die Cramersche Regel auch im  $3 \times 3$ -Fall angewandt werden. Dazu muss man nur wissen, wie die Determinanten von Matrizen mit drei (und nicht zwei) Zeilen/Spalten ermittelt werden. Erfreulicherweise ist dies aber ganz einfach. Dazu betrachten wir die  $3 \times 3$ -Matrix

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

und wollen beschreiben, wie man die Determinante dieser Matrix bestimmt. Dieses Verfahren wird in der Literatur auch als Regel von Sarrus bezeichnet.

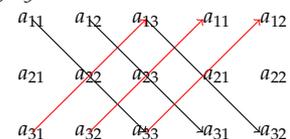
Dazu verlängert man die Matrix um zwei weitere Spalten, deren Zahlenwerte aber den Werten aus den ersten Spalten entsprechen, und zeichnet sich gedanklich sechs Diagonalstriche ein, siehe die Abbildung 7.

Nun werden entlang der gezeichneten Linien alle Matrixelemente miteinander multipliziert. Für die erste schwarze Linie ergibt dies das Produkt  $a_{11} \cdot a_{22} \cdot a_{33}$ , für die erste rote Linie ergibt dies das Produkt  $a_{31} \cdot a_{22} \cdot a_{13}$ . Zuletzt werden alle »schwarzen« Produkte addiert und alle »roten« Produkte subtrahiert. Das Ergebnis ist die gesuchte Determinante.

## 6 Erwartungswerte und Varianzen

Bei der Ermittlung von Erwartungswerten und Varianzen müssen wir zwei Fälle unterscheiden. Zum einen kann es sich um eine Situation handeln, bei der die unsichere Variable endlich viele Möglichkeiten annehmen kann. Hier sprechen wir von einer diskreten Zufallsvariable.<sup>17</sup>

Abbildung 7: Sarrussche Regel für  $3 \times 3$ -Matrizen



<sup>17</sup> Joseph Doob, einer der Begründer der modernen Wahrscheinlichkeitstheorie, berichtet in einem Interview davon, wieso man im Englischen von "random variable" und nicht von "chance variable" spricht: "While writing my book I had an argument with [dem berühmten Statistiker William] Feller. He asserted that everyone said *random variable* and I asserted that everyone said *chance variable*. We obviously had to use the same name in our books, so we decided the issue by a stochastic procedure. That is, we tossed for it and he won." (<http://www.dartmouth.edu/~chance/Doob/conversation.html>)

<sup>18</sup> Diese Begriffswahl ist eigentlich nicht präzise. Man spricht genauer von stetigen Zufallsvariablen, wenn der Zustandsraum offen ist – wenn also zu zwei Zuständen immer ein dritter gefunden werden kann, der »zwischen« den beiden liegt. In unseren Vorlesungen werden aber nur Fälle auftauchen, in denen entweder nur endliche Zustandsräume auftauchen oder aber der Zustandsraum gleich der Menge der reellen Zahlen ist. Daher verwenden wir hier eine etwas unpräzise Bezeichnung.

Es kann aber auch möglich sein, dass die unsichere Variable eine von unendlich vielen Möglichkeiten annimmt. In diesem Fall sprechen wir von einer stetigen Zufallsvariable.<sup>18</sup> Je nachdem, welcher Fall vorliegt, erfolgen die Berechnungen von Erwartungswert und Varianz auf eine andere Weise.

Der Erwartungswert gibt den durchschnittlichen Wert einer Zufallsvariable an. Die Varianz ist in der Statistik ein Streuungsmaß. Sie misst die Abweichung einer Zufallsvariable  $X$  von ihrem Erwartungswert  $E[X]$ .

Die Kovarianz ist in der Statistik eine Maßzahl für den linearen Zusammenhang zweier Zufallsvariablen  $X$  und  $Y$ . Sie gibt zwar die Richtung der linearen Beziehung beider Variablen an, über die Stärke des linearen Zusammenhangs wird aber keine Aussage getroffen. Um den linearen Zusammenhang vergleichbar zu machen, muss die Kovarianz standardisiert werden. Man erhält dann den *Korrelationskoeffizienten*.

Dieser Korrelationskoeffizient ist ein dimensionsloses Maß für den Grad des linearen Zusammenhangs zwischen zwei Variablen. Er kann lediglich Werte zwischen  $-1$  und  $1$  annehmen. Bei einem Wert von  $+1$  (bzw.  $-1$ ) besteht ein vollständig positiver (bzw. negativer) linearer Zusammenhang zwischen den betrachteten Variablen. Wenn der Korrelationskoeffizient den Wert  $0$  aufweist, hängen die beiden Variablen überhaupt nicht linear voneinander ab.

### 6.1 Diskrete Zufallsvariable

Im folgenden bezeichnen wir die Zustände immer mit  $s$ , sie können Werte von  $1$  bis  $S$  annehmen. Die Wahrscheinlichkeit des Zustandes  $s$  ist  $p_s$ , auch oft geschrieben als  $p(X = X_s)$ .

$$\begin{aligned} E[X] &= \sum_{s=1}^S X_s \cdot p_s \\ \text{Var}[X] &= \sum_{s=1}^S (X_s - E[X])^2 \cdot p_s \\ &= \sum_{s=1}^S (X_s - E[X])^2 \cdot p_s \\ &= \sum_{s=1}^S X_s^2 \cdot p_s - E[X]^2 \\ \text{Cov}[X, Y] &= \sum_{s=1}^S (X_s - E[X]) \cdot (Y_s - E[Y]) \cdot p_s \\ &= \sum_{s=1}^S X_s \cdot Y_s \cdot p_s - E[X] \cdot E[Y] \end{aligned}$$

### 6.2 Stetige Zufallsvariablen

Die Dichtefunktion der Zufallsvariablen ist hier mit  $f(x)$  angegeben. Sie spielt bei stetigen Zufallsvariablen diejenige Rolle, die die Wahrscheinlichkeiten bei diskreten Variablen besitzen, wobei jetzt

statt der Summen Integrale auftauchen:

$$\begin{aligned} E[X] &= \int_{-\infty}^{\infty} xf(x)dx \\ \text{Var}[X] &= \int_{-\infty}^{\infty} (x - E[X])^2 f(x)dx \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x)dx - E[X]^2 \\ \text{Cov}[X,Y] &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} (x - E[X])(y - E[Y])f(x,y)dxdy \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot y \cdot f(x,y)dxdy - E[X]E[Y] \end{aligned}$$

### 6.3 Weitere Zusammenhänge

Unabhängig davon, ob die Zufallsvariable diskret oder stetig ist, gelten eine Reihe weiterer Gesetze.

So ist der Erwartungswert linear in Konstanten

$$E[a + bX] = a + bE[X].$$

und auch für mehrere Zufallsvariablen  $X^1, X^2, \dots$

$$E\left[\sum_{i=1}^n X^i\right] = \sum_{i=1}^n E[X^i].$$

Die Varianz ist nicht linear, hier gilt vielmehr

$$\text{Var}[a + bX] = b^2 \text{Var}[X]$$

Für Summen von Zufallsvariablen gilt dann

$$\text{Var}[aX + bY] = a^2 \text{Var}[X] + 2ab \cdot \text{Cov}[X,Y] + b^2 \text{Var}[Y]$$

und analog

$$\text{Var}\left[\sum_{i=1}^n a_i X^i\right] = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_i a_j \text{Cov}[X^i, X^j]$$

Ebenso gelten die Zusammenhänge

$$\begin{aligned} \text{Var}[X] &= E[(X - E[X])^2] \\ \text{Cov}[X,Y] &= E[(X - E[X])(Y - E[Y])] \\ \text{Cov}[aX + b, cY + d] &= ac \text{Cov}[X,Y] \\ \text{Cov}[X + Y, Z] &= \text{Cov}[X,Z] + \text{Cov}[Y,Z] \end{aligned}$$

Als Verschiebungssatz bezeichnet man die Aussage

$$\begin{aligned} \text{Var}[X] &= E[X^2] - (E[X])^2 \\ \text{Cov}[X,Y] &= E[XY] - E[X]E[Y] \end{aligned}$$

Der Korrelationskoeffizient wird wie folgt definiert

$$\text{Korr}[X,Y] = \rho(X,Y) := \frac{\text{Cov}[X,Y]}{\sqrt{\text{Var}[X]} \cdot \sqrt{\text{Var}[Y]}}$$

AUFGABE 6.1 Es gebe zwei Zeitpunkte und in der Zukunft vier mögliche Zustände. Betrachten Sie die folgenden Lotterien A und B.

	Zustand 1	Zustand 2	Zustand 3	Zustand 4
Wahrscheinlichkeit	$q_1 = 0.1$	$q_2 = 0.2$	$q_3 = 0.3$	$q_4 = 0.4$
Rückfluss A	$x_1 = 50$	$x_2 = 40$	$x_3 = 90$	$x_4 = 30$
Rückfluss B	$x_1 = 50$	$x_2 = 60$	$x_3 = 30$	$x_4 = 80$

Bestimmen Sie die Erwartungswerte, die Varianzen sowie die Kovarianz der Rückflüsse der beiden Lotterien.

## 7 Differentiation und Integration

### 7.1 Funktionsbegriff, Eigenschaften von Funktionen einer Variablen

**Hinweis:** 3Blue1Brown hat eine sehr sehenswerte Reihe zur Analysis (Ableitungen, Kettenregel, Taylorreihe etc., Link zur Playlist): [youtube.com/playlist?list=PLZHQObOWTQDMsrGK-rj53DwVRMYO3t5Yr](https://www.youtube.com/playlist?list=PLZHQObOWTQDMsrGK-rj53DwVRMYO3t5Yr).

Unter einer Funktion versteht man eine eindeutige Zuordnung eines Funktionswerts  $f(x)$  zu einer Zahl  $x$ . Dabei ist entscheidend, dass es zu jedem  $x$  einen und höchstens einen Wert  $f(x)$  gibt. Wichtige Eigenschaften von Funktionen, auf die wir in den Vorlesungen zurückgreifen werden, sind die folgenden.

Eine Funktion  $f(x)$  heißt *stetig*, wenn für jeden Wert  $x_0$  folgendes gilt

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0).$$

Geht also das Argument  $x$  gegen eine Zahl  $x_0$ , so muss auch der Funktionswert  $f(x)$  gegen den Funktionswert  $f(x_0)$  laufen. Nicht stetige Funktionen weisen, wenn man sie in Diagrammen darstellt, Sprungstellen auf.

Eine Funktion  $f(x)$  heißt *differenzierbar*, wenn für jeden Wert  $x$  die erste Ableitung  $f'(x)$  existiert.<sup>19</sup> Differenzierbare Funktionen sind immer stetig. Eine typische nicht differenzierbare Funktion ist die Betragsfunktion  $|x|$ , an der Stelle  $x = 0$  kann man keine Ableitung bilden.

Eine Funktion  $f(x)$  heißt (strikt) *monoton wachsend*, wenn für zwei Werte  $x_1 > x_2$  immer

$$f(x_1) \geq f(x_2) \quad (\text{bzw.}) \quad f(x_1) > f(x_2)$$

gilt. Wenn eine Funktion monoton wachsend und differenzierbar ist, dann gilt zudem  $f'(x) \geq 0$ . Wenn man monotone Funktionen in Diagrammen darstellt, so muss der Funktionsverlauf entweder wachsend oder fallend sein.

<sup>19</sup> Wenn man zudem voraussetzt, dass diese erste Ableitung wieder stetig sein soll, so spricht man davon, dass die Funktion »von der Klasse  $C^1$ « oder »einmal stetig differenzierbar ist«.  $C$  steht dabei für »continuous«, die 1 für die erste Ableitung.  $C^2$  heißt dann, dass auch die zweite Ableitung stetig ist usw.

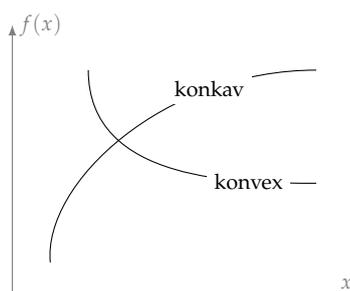


Abbildung 8: Konvexe und konkave Funktionen.

Eine Funktion  $f(x)$  heißt konkav (konvex), wenn für zwei Werte  $x_1 > x_2$  die Verbindungsgerade zwischen beiden Funktionswerten unterhalb der Funktion verläuft. Verbindet man  $x_1$  mit  $x_2$ , so können die dazwischen liegenden Funktionswerte durch den Term  $f(x_1) + (f(x_2) - f(x_1))t$  für  $t \in [0,1]$  beschrieben werden. Also muss für konkave Funktionen gelten

$$\forall t \in [0,1] \quad \underbrace{f(x_1 + (x_2 - x_1)t)}_{\text{Funktionswert}} \geq \underbrace{f(x_1) + (f(x_2) - f(x_1))t}_{\text{Verbindungsline}}.$$

Wenn eine Funktion konkav und differenzierbar ist, dann gilt  $f'(x)$  ist monoton fallend in  $x$ . Wenn eine Funktion konkav und zweimal differenzierbar ist, dann gilt  $f''(x) \leq 0$ .

Bei der Lösung von Entscheidungsproblemen unter Sicherheit benutzen wir den Begriff der Quasikonkavität.<sup>20</sup> Eine Funktion heißt quasikonkav, wenn für zwei Werte  $x_1$  und  $x_2$  mit  $f(x_2) \geq f(x_1)$  folgendes gilt

$$\forall t \in [0,1] \quad f(x_1 + (x_2 - x_1)t) \geq f(x_1).$$

Diese Bedingung ist schwächer als die der Konkavität und in der Tat muss eine quasikonkave Funktion nicht unbedingt auch konkav sein. Quasikonkave Funktionen sind nicht ganz so einfach wie konkave Funktionen zu charakterisieren. Wir benötigen diese Bedingung auch nur, um die Eindeutigkeit von Nutzenmaximierungsaufgaben beweisen zu können. Denn quasikonkave Funktionen mehrerer Variabler zeichnet aus, dass dort die Indifferenzkurven einen konvexen Verlauf aufweisen.

## 7.2 Nullstellen und Näherungsverfahren

Eine häufig anzutreffende Aufgabe besteht darin, Nullstellen einer Funktion zu bestimmen. Unter einer Nullstelle  $i^*$  einer Funktion  $f(i)$  versteht man denjenigen Wert, bei dem  $f(i^*) = 0$  gilt. In einigen Fällen ist es möglich, eine geschlossene Gleichung für derartige Nullstellen anzugeben – denken Sie dazu an den Fall eines Polynoms oder gar einer Gleichung dritten Grades. In vielen Fällen aus der Praxis dagegen wird man typischerweise ein Näherungsverfahren verwenden müssen, um die Nullstellen einer Funktion bestimmen zu können, weil keine derartigen Lösungsformeln existieren.

Eine Möglichkeit besteht in folgendem Iterationsverfahren. Man geht von zwei Startwerten  $i_0$  und  $i_1$  aus, deren Funktionswerte  $f(i_0) > 0$  und  $f(i_1) < 0$  unterschiedliche Vorzeichen ergeben. Dann weiß man, dass zwischen  $i_0$  und  $i_1$  die gesuchte Nullstelle liegen muss. Nun verbindet man die beiden Funktionswerte (siehe dazu Abbildung 9) und wählt als nächsten Schrittwert  $i_2$  den Schnittpunkt zwischen der Verbindungsline der Funktionswerte und der  $i$ -Achse. Dabei sind drei Fälle möglich:

$f(i_2) = 0$  In diesem Fall haben wir die Nullstelle gefunden.

<sup>20</sup> Beachten Sie, dass es (in der Mathematik) keine quasikonvexen Funktionen gibt.

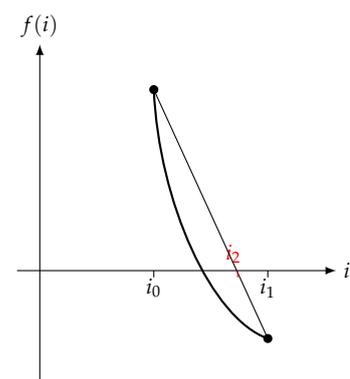


Abbildung 9: Näherungsverfahren zur Nullstellenbestimmung.

$f(i_2) < 0$  (Dieser Fall ist in der Abbildung 9 zu sehen.) In diesem Fall ersetzen wir  $i_1$  durch  $i_2$ , lassen  $i_0$  unverändert und starten das Verfahren erneut.

$f(i_2) > 0$  In diesem Fall ersetzen wir  $i_0$  durch  $i_2$ , lassen  $i_1$  unverändert und starten das Verfahren erneut.

Da der Abstand zwischen den beiden Werten  $i_0$  und  $i_1$  immer kleiner wird, muss das Verfahren gegen die Nullstelle konvergieren. Es verbleibt uns nur noch, eine konkrete Gleichung für den neuen Wert  $i_2$  anzugeben.

Dazu muss man sich klarmachen, dass die Verbindungslinie nichts anderes als eine Gerade ist. Diese hat die mathematische Form

$$y = a \cdot i + b.$$

Dabei wissen wir bereits, dass

$$f(i_0) = a \cdot i_0 + b$$

$$f(i_1) = a \cdot i_1 + b$$

gilt, denn das waren die Punkte, durch die die Gerade verlief. Daraus lassen sich  $a$  und  $b$  bestimmen (dies ist ja ein Gleichungssystem mit zwei Unbekannten, siehe auch Abschnitt 5):

$$a = \frac{f(i_0) - f(i_1)}{i_0 - i_1}, \quad b = \frac{i_0 f(i_1) - i_1 f(i_0)}{i_0 - i_1}.$$

$i_2$  ist nun derjenige Punkt, an dem unsere Gerade die  $i$ -Achse schneidet, also den  $y$ -Wert von Null aufweist. Einsetzen der gerade erhaltenen Werte für  $a$  und  $b$  liefert

$$0 = a \cdot i_2 + b \quad \implies \quad i_2 = \frac{i_1 f(i_0) - i_0 f(i_1)}{f(i_0) - f(i_1)}.$$

Wir wollen diese Überlegungen mit einem Beispiel beenden. Wir suchen den internen Zins einer Investition mit der Anfangsauszahlung  $I_0 = 100$  und den Cashflows  $CF_1 = 30$ ,  $CF_2 = 20$  und  $CF_3 = 70$ . Die Funktion, deren Nullstelle wir bestimmen müssen, lautet dann

$$f(i) = NPV(i) = -100 + \frac{30}{1+i} + \frac{20}{(1+i)^2} + \frac{70}{(1+i)^3}.$$

Abbildung 10: Iterative Bestimmung der Nullstelle einer NPV-Funktion (gerundet auf fünf Ziffern, berechnet mit Excel).

Index $t$	$i_t$	$NPV(i_t)$	$i_t$ ersetzt
0	0%	20	–
1	10%	-3,6063	–
2	8,4723%	-0,4998	$i_1$
3	8,2657%	-0,0676	$i_2$
4	8,2379%	-0,0091	$i_3$
5	8,2341%	-0,0012	$i_4$
6	8,2336%	-0,0002	$i_5$
7	8,2336%	0	–

Wir müssen diese Funktion  $f(i)$  in die Iterationsregel

$$i_2 := \frac{i_1 f(i_0) - i_0 f(i_1)}{f(i_0) - f(i_1)}$$

einsetzen. Es ist sinnvoll, mit den Werten  $i_0 = 0$  und  $i_1 = 10\%$  zu beginnen, da beide ein unterschiedliches Vorzeichen aufweisen. Wir erhalten nun schrittweise mit unserer Iterationsregel das Ergebnis in Abbildung 10.

## 7.3 Einfache Ableitungsfunktionen und -regeln

**Hinweis:** 3Blue1Brown hat ein sehenswertes Video mit einer Veranschaulichung der Ableitung sowie einer Anwendung auf Fixpunkte (Nullstellen):

<https://www.youtube.com/watch?v=CfW845LNObM>.

In den Vorlesungen und Übungen gehen wir davon aus, dass Sie die Ableitungen in Abbildung 11 beherrschen. Oft hat man es mit Funktionen zu tun, die miteinander verknüpft sind. In diesem Fall helfen die folgenden Ableitungsregeln weiter.

$$\text{Produktregel:} \quad (g \cdot h)' = g' \cdot h + g \cdot h'$$

$$\text{Quotientenregel:} \quad \left(\frac{g}{h}\right)' = \frac{g' \cdot h - g \cdot h'}{h^2}$$

$$\text{Potenzregel:} \quad (x^n)' = nx^{n-1}$$

$$\text{Kettenregel:} \quad (g \circ h)'(x) = (g(h(x)))' = g'(h(x)) \cdot h'(x)$$

Funktion $f(x)$	Ableitung $f'(x)$
$x^n$	$nx^{n-1}$ ( $n \neq 0$ )
$e^{ax}$	$ae^{ax}$
$a^x$	$a^x \ln(a)$
$\ln(x)$	$\frac{1}{x}$
$\arctan(x)$	$\frac{1}{1+x^2}$

Abbildung 11: Wichtige Ableitungen.

## 7.4 l'Hospitalsche Regel

**Hinweis:** 3Blue1Brown hat ein sehenswertes Video mit einer graphischen Veranschaulichung zur l'Hospitalschen Regel:

[youtube.com/watch?v=kfF4oMiS7zA&list=PLZHQObOWTQDMsr9K-rj53DwVRMYO3t5Yr&index=7](https://www.youtube.com/watch?v=kfF4oMiS7zA&list=PLZHQObOWTQDMsr9K-rj53DwVRMYO3t5Yr&index=7).

Es gibt Situationen, bei denen man den Grenzwert eines Quotienten zweier Funktionen  $f(x), g(x)$  berechnen möchte

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{g(x)}$$

und dieser Grenzwert aber auf eine Situation führt, in der wir entweder auf  $\frac{0}{0}$  oder  $\frac{\infty}{\infty}$  gelangen. Man spricht hier von unbestimmten Ausdrücken, da man nicht ohne weiteres erkennen kann, welches Ergebnis dieser Grenzwert aufweisen wird. An dieser Stelle hilft die Regel von l'Hospital: Sowohl Zähler als auch Nenner des Quotienten werden einmal abgeleitet und es muss sich das gleiche Ergebnis einstellen:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(0)}{g'(0)}$$

Natürlich müssen beide Funktionen differenzierbar sein.

Die Intuition für diesen Satz kann man sich unter Verwendung der Taylorreihe klarmachen. Man entwickelt beide Funktionen in der Nähe der Null und erhält

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{g(x)} \approx \frac{f(0) + f'(0)x}{g(0) + g'(0)x} = \frac{f'(0)}{g'(0)}.$$

Genau das ist aber die Aussage der l'Hospitalschen Regel.

### 7.5 Stammfunktionen und Integration

Die Umkehrung der Ableitung stellt die (unbestimmte) Integration dar. Dabei wird zu einer Funktion  $f(x)$  diejenige Funktion  $F(x)$  gesucht, deren Ableitung wieder  $f(x)$  ergibt. Auch gelten eine Reihe allgemeiner Regeln, die bei uns verwendet werden. Die partielle Integration besagt:

$$\int_a^b f(x) \cdot g'(x) dx = [f(x) \cdot g(x)]_a^b - \int_a^b f'(x) \cdot g(x) dx$$

Die Integration durch Substitution bedeutet:

$$\int_a^b f(g(x)) \cdot g'(x) dx = \int_{g(a)}^{g(b)} f(z) \cdot g'(x) \frac{dz}{g'(x)} = \int_{g(a)}^{g(b)} f(z) dz = F(z)$$

wobei

$$\frac{\phi(x)}{g'(x)} = f(g(x)) = f(z), z = g(x), dz = g'(x) dx.$$

### 7.6 Funktionen mehrerer Variablen

**Hinweis:** 3Blue1Brown hat ein sehenswertes Video mit einer graphischen Veranschaulichung zum totalen Differential (implizite Differentiation):

[youtube.com/watch?v=qb40j4N1fa4&list=PLZHQObOWTQDMsr9Krj53DwVRMYO3t5Yr&index=6](https://www.youtube.com/watch?v=qb40j4N1fa4&list=PLZHQObOWTQDMsr9Krj53DwVRMYO3t5Yr&index=6).

Wir werden in den Vorlesungen auch Funktionen mehrerer Variablen  $f(x,y)$  kennen lernen. Eine solche Funktion können Sie sich als eine zweidimensionale Fläche in einem  $x$ - $y$ - $z$ -Diagramm veranschaulichen. Für diese Funktionen ist das totale Differential wichtig.

Stellen Sie sich vor, dass Sie eine Ableitung der Funktion  $f$  bilden sollen. Allerdings ist jetzt nicht klar, nach welcher Variablen abgeleitet werden soll:  $x$  oder  $y$ ? Man muss daher die Variable deutlich kennzeichnen, nach der abgeleitet wird und schreibt  $\frac{\partial f}{\partial x}$  oder  $\frac{\partial f}{\partial y}$  und nennt diesen Ausdruck »partielle Ableitung«. Auch sind Schreibweisen der Form  $f_x$  oder  $f_y$  üblich. Die partielle Ableitung kann man sich als eine Tangente an die Fläche darstellen, die parallel zur  $x$ - oder zur  $y$ -Achse verläuft.

In einigen Fällen ist es notwendig, nicht nur die Ableitung nach einer Variablen, sondern nach »allen Richtungen oder allen Variablen« zu bilden. Eine solche Situation kann beispielsweise eintreten, wenn sowohl  $x$  als auch  $y$  nicht beliebig zu wählen sind, sondern selbst von einem Parameter (etwa  $t$ ) abhängen. Dann liegt in Wirklichkeit keine Funktion von zwei Variablen, sondern nur von einer Variablen vor:  $f(x(t), y(t))$ . Diese Funktion können Sie nach  $t$  ableiten und wenden dabei eine Gleichung an, die das totale Differential heißt:

$$\frac{df(x(t), y(t))}{dt} = \frac{\partial f(x, y)}{\partial x} \frac{dx(t)}{dt} + \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} \frac{dy(t)}{dt}.$$

Lassen Sie sich nicht von der kompakteren Schreibweise

$$\frac{df}{dt} = f_x \frac{dx}{dt} + f_y \frac{dy}{dt}$$

verwirren.

8 Lösungen

Aussagenlogik

LÖSUNG 3.1:  $A \rightarrow B$  wurde bereits abgebildet.

Für  $\neg A \vee B$  erhalten wir (in den Tabellen notieren wir in der ersten Spalte  $A$  und der ersten Zeile  $B$ )

$\neg A \vee B$	W	F
W	W	F
F	W	W

offensichtlich sind beide Ausdrücke logisch äquivalent.

LÖSUNG 3.2:  $A \leftrightarrow B$  wurde bereits beschrieben.

Der Ausdruck  $(A \rightarrow B) \wedge (B \rightarrow A)$  ergibt sich wie folgt

$A \rightarrow B$	W	F	$B \rightarrow A$	W	F
W	W	F	W	W	W
F	W	W	F	F	W

und damit erhalten wir

$\dots \wedge \dots$	W	F
W	W	F
F	F	W

LÖSUNG 3.3:  $A \rightarrow B$  kennen wir bereits

Für  $\neg B \rightarrow \neg A$  erhalten wir (in den Tabellen notieren wir in der ersten Spalte  $A$  und der ersten Zeile  $B$ )

$\neg B \rightarrow \neg A$	B=W	B=F
A=W	W	W
A=F	F	W

und sehen, dass sich das gleiche Ergebnis einstellt.

Diese Äquivalenz nutzt man beim so genannten indirekten Beweis aus. Man geht aus von einer wahren Aussage  $A$  und möchte zeigen, dass auch  $B$  wahr ist. Der einfachste Fall wäre der Aristotelische Schluss: Man zeigt weiter, dass auch die Implikation  $A \rightarrow B$  wahr ist und daraus folgt die Gültigkeit von  $B$ :

$$\frac{\begin{array}{l} A \\ A \rightarrow B \end{array}}{B}$$

Manchmal bietet es sich aber auch an, indirekt vorzugehen. In diesem Fall zeigt man nicht die Gültigkeit von  $A \rightarrow B$ , sondern beweist  $\neg B \rightarrow \neg A$ . Wäre dann  $B$  falsch, dann müsste nach dem Aristotelischen Schluss  $A$  falsch sein – was aber nicht richtig sein kann. Also gilt ebenfalls  $B$ . Der indirekte Beweis lässt sich wie folgt darstellen

$$\frac{\begin{array}{l} A \\ \neg B \rightarrow \neg A \end{array}}{B}$$

LÖSUNG 3.4:

$$\forall x (R(x) \rightarrow S(x))$$

Die Aussage lautet in logisch präziser Form: »Für jedes Auto  $x$  gilt: Wenn es rot ist, dann ist es schnell.«

LÖSUNG 3.5:

$$\forall x \exists y (Nf(x,y) \wedge (y > x)).$$

Die Aussage lautet in logisch präziser Form: »Für jede natürliche Zahl  $x$  gibt es mindestens eine Zahl  $y$ , so dass  $y$  der Nachfolger von  $x$  ist und  $y > x$  gilt.«

LÖSUNG 3.6:

$$\begin{aligned} & \neg \forall x (R(x) \rightarrow S(x)) \\ \iff & \exists x \neg (R(x) \rightarrow S(x)) \\ \iff & \exists x \neg (\neg R(x) \vee S(x)) \\ \iff & \exists x (R(x) \wedge \neg S(x)) \end{aligned}$$

In normalem Deutsch: »Es gibt ein Auto, das rot und nicht schnell ist« oder noch kürzer »ein rotes Auto ist nicht schnell«. Die Identität von  $A \rightarrow B$  (zweite Zeile) und  $\neg A \vee B$  (dritte Zeile) folgte aus Aufgabe 3.1.

Beachten Sie, dass die Aussage »Alle roten Autos sind nicht schnell« keine Verneinung der Aussage aus der Aufgabe darstellt! Nur *ein* rotes Auto muss langsam sein, nicht etwa alle roten Autos.

LÖSUNG 3.7:

$$\begin{aligned} & \neg \forall x \exists y (Nf(x,y) \wedge (y > x)) \\ \iff & \exists x \forall y \neg (Nf(x,y) \wedge (y > x)) \\ \iff & \exists x \forall y (\neg Nf(x,y) \vee (y \leq x)) \\ \iff & \exists x \forall y (Nf(x,y) \rightarrow (y \leq x)) \end{aligned}$$

In normalem Deutsch: »Es gibt eine Zahl  $x$ , so dass alle möglichen Zahlen  $y$  keine Nachfolger oder kleiner als  $x$  sind« (vorletzte Zeile). Äquivalent ist die Aussage »Es gibt eine Zahl  $x$ , deren Nachfolger alle kleiner (als  $x$ ) sind« (letzte Zeile, die Identität von  $A \rightarrow B$  und  $\neg A \vee B$  folgte aus Aufgabe 3.1).

### Summen- und Produktzeichen

LÖSUNG 4.1: Das arithmetische Mittel ist

$$\frac{a + b + a - b}{2} = a.$$

Das geometrische Mittel ist

$$\sqrt{(a+b)(a-b)} = \sqrt{a^2 - b^2}.$$

Letzteres ist offensichtlich kleiner als  $a$ .

Das arithmetische Mittel ist

$$\frac{1}{2} \left( \frac{a}{b} + a \cdot b \right) = \frac{1+b^2}{2b} a.$$

Das geometrische Mittel ist

$$\sqrt{\frac{a}{b} ab} = a.$$

Es ist nicht sofort erkennbar, dass dies kleiner als das arithmetische Mittel ist. Also beweisen wir es. Dazu müssen wir nur zeigen, dass

$$\begin{aligned} \frac{1+b^2}{2b} a &\geq a \\ 1+b^2 &\geq 2b \\ (b-1)^2 &= 1-2b+b^2 \geq 0. \end{aligned}$$

Da jede der Umformungen äquivalent war, folgt aus der letzten (wahren) Aussage die Behauptung.

**LÖSUNG 4.2:** Bei der Beweismethode der vollständigen Induktion wird man immer in zwei Schritten vor. Der erste Schritt heißt Induktionsanfang, den zweiten Schritt nennt man Induktionsschritt.

**INDUKTIONSANFANG** Hier beweist man die zu zeigende Aussage für  $N = 1$ . Dies ist in unserem Fall sehr einfach:

$$\sum_{n=1}^N n = 1 = N.$$

**INDUKTIONSSCHRITT** Beim Induktionsschritt nimmt man an, dass die Aussage bereits für  $N$  bewiesen ist (dies nennt man die Induktionsannahme). Unter dieser Voraussetzung zeigt man, dass sie dann auch für  $N + 1$  gilt:

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{N+1} n &= \left( \sum_{n=1}^N n \right) + (N+1) && \text{Distributivgesetz} \\ &= \frac{N(N+1)}{2} + (N+1) && \text{Induktionsannahme} \\ &= \frac{(N+1)(N+2)}{2} && \text{umstellen} \end{aligned}$$

Aber genau das war zu beweisen.

**LÖSUNG 4.3:** In dieser Aufgabe sollen alle geraden Zahlen bis  $2N$  addiert werden. Jede dieser Zahlen lässt sich aber als Produkt  $2k$  schreiben, wobei der Parameter  $k$  nun die Werte von 1 bis  $N$  durchläuft. Dies nutzen wir aus, denn so haben wir

$$\begin{aligned} \sum_{\substack{n=1, \\ n \text{ gerade}}}^{2N} n &= \sum_{k=1}^N 2k \\ &= 2 \sum_{k=1}^N k = N(N+1) \end{aligned}$$

LÖSUNG 4.4: Hier ergibt sich

$$\left(\sum_{s=1}^4 a_s\right)^2 = \sum_{s=1}^4 \sum_{t=1}^4 a_s a_t$$

LÖSUNG 4.5:

$$\ln\left(\prod_{s=1}^N a_s\right) = \sum_{s=1}^N \ln(a_s).$$

### *Erwartungswerte und Varianzen*

LÖSUNG 6.1:

$$\begin{aligned} E[A] &= 0,1 \times 50 + 0,2 \times 40 + 0,3 \times 90 + 0,4 \times 30 \\ &= 52 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Var}[A] &= 0,1 \times (50 - 52)^2 + 0,2 \times (40 - 52)^2 + 0,3 \times (90 - 52)^2 + 0,4 \times (30 - 52)^2 \\ &= 656 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} E[B] &= 0,1 \times 50 + 0,2 \times 60 + 0,3 \times 30 + 0,4 \times 80 \\ &= 58 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Var}[B] &= 0,1 \times (50 - 58)^2 + 0,2 \times (60 - 58)^2 + 0,3 \times (30 - 58)^2 + 0,4 \times (80 - 58)^2 \\ &= 436 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Cov}[A,B] &= E[A \times B] - E[A] \times E[B] \\ &= 0,1 \times 50 \times 50 + 0,2 \times 40 \times 60 + 0,3 \times 90 \times 30 + 0,4 \times 30 \times 80 - 52 \times 58 \\ &= -516 \end{aligned}$$