Skript zur Vorlesung “Derivate und ihre Bewertung”

Univ.–Prof. Dr. Dr. Andreas Löffler

letzte Änderung am 24. August 2009

“Es ist unmöglich, die Schönheit der Naturgesetze angemessen zu vermitteln, wenn jemand die Mathematik nicht versteht. Ich bedauere das, aber es ist wohl so.”
Physik–Nobelpreisträger Richard Feynman (1918-1988)

Inhaltsverzeichnis

Definitionen, Sätze

Die Liste enthält eine Übersicht über die im Skript zu findenden Definitionen und Sätze

1 Eine erster Blick auf Derivate

1.1 Was sind Termingeschäfte?

Lernziel: Wir formulieren eine vage Definition der Arbitragefreiheit. Wir erkennen, dass bei Termingeschäften Vertragsabschluss und Lieferung auseinander fallen.

Die Bewertung von Derivaten basiert auf der Idee der *Arbitragefreiheit*. Arbitragefreiheit bedeutet dabei etwas vereinfacht, dass niemand einen Geldzufluss ohne eigene Ausgaben erhalten kann – anderenfalls würden alle Investoren diese Gelegenheit nutzen und der Geldzufluss würde sofort am Markt versiegen. Ziel der Vorlesung ist es, diese einfache Idee für die Zwecke der Bewertung nutzbar zu machen.

Dabei werden wir in zwei Schritten vorgehen. Zuerst wird es uns anhand einfacher Beispiele gelingen, mit der eben formulierten einfachen Beschreibung der Arbitragefreiheit auszukommen. Etwa bei der Put–Call–Parität (siehe Abschnitt 2.2) oder der Bewertung von Futures (siehe Abschnitt 2.3) reicht diese eher unwissenschaftliche Formulierung noch aus. Wir werden aber sehen, dass wir für die Bewertung von Optionen eine wesentlich detailliertere Theorie benötigen, um uns dem Konzept der Arbitragefreiheit zu nähern – und diese präzise Definition der Arbitragefreiheit werden wir erst im Abschnitt 3.3 angeben. Im folgenden verstehen wir unter "Arbitragefreiheit" erst einmal die Unmöglichkeit, sichere Geldzuflüsse ohne Ausgaben zu erzielen. Jetzt wenden wir uns einer allgemeinen Charakteristik von Kaufverträgen zu.

Bei einem Kaufvertrag lassen sich grundsätzlich drei relevante Zeitpunkte unterscheiden:

t_0 Vertragsabschluss,

t_1 Erfüllung durch den Verkäufer (Lieferung) und

t_2 Erfüllung durch den Käufer (Bezahlung).

Bei einem Kassageschäft liegen Vertragsabschluss und Erfüllung zeitlich eng beieinander. Ein Termingeschäft unterscheidet sich von einem Kassageschäft (Spotgeschäft) dadurch, dass zwar der Vertragsabschluss heute stattfindet, aber die Erfüllung durch den Verkäufer erst später $(t_0 < t_1)$. So kann man eine Tageszeitung jeden Morgen im Zeitungsladen kaufen (Kassageschäft) oder aber abonnieren (Termingeschäft).

Es gibt Termingeschäfte für Güter wie Gold, Kaffee oder Schweinehälften und für Finanztitel wie Bundesanleihen, Aktien, fremde Währungen oder gar Aktienindizes. Man unterscheidet zwischen unbedingten (festen) und bedingten Termingeschäften. Im ersten Fall müssen beide Parteien liefern beziehungsweise bezahlen. Im zweiten Fall erfolgt die beiderseitige Erfüllung nur unter der Voraussetzung, dass der Erwerber der Terminposition das im Zeitpunkt der Fälligkeit ausdrücklich wünscht. Ein Zeitungsabonnement ist demnach ein unbedingtes Termingeschäft, da sich beide Seiten binden, die Zeitungen gegen einen bestimmten Geldbetrag zu tauschen.

Im folgenden sagen wir statt kaufen auch "long halten" und statt verkaufen auch "short halten". Eine long position ist demnach die Vermögenssituation des Käufers, eine short position die Vermögenssituaion des Verkäufers. Dies entspricht im übrigen auch der Umgangssprache der Händler.

1.2 *Unbedingte Termingeschäfte*

Lernziel: Wir beschreiben die wichtigsten unbedingten Termingeschäfte: Forwards, Futures und Swaps. Später werden nur Futures und Forwards eine wichtige Rolle spielen.

Bei unbedingten Termingeschäften muss der Käufer die Ware annehmen und bezahlen, der Verkäufer muss liefern.

In der Regel besteht allerdings die Möglichkeit, das Umkehrgeschäft durchzuführen und auf diese Weise den Kontrakt zu "schließen" oder – wie man auch sagt – sich "glatt zustellen". So kann der Käufer seinen Kontrakt schließen, indem er einen identischen Kontrakt verkauft. Der Verkäufer hat dieselbe Möglichkeit, indem er einen Kontrakt zurückkauft. Glatt stellen bedeutet im täglichen Handel häufig nichts anderes, als dass die Seite, die einen Verlust gegenüber dem Kassamarkt erzielt, diesen Verlust an die Gegenseite zahlt. Wir werden weiter unten ein Beispiel für ein solches Gegengeschäft bringen.

Man unterscheidet bei unbedingten Termingeschäften zwischen Forwards und Futures. Für beide ist typisch, dass der Käufer im Zeitpunkt des Vertragsabschlusses nichts zahlt, wenn man von der Stellung von Sicherheiten absieht.

Forwards Ein Forward verpflichtet den Käufer (Verkäufer), einen bestimmten Gegenstand (das "underlying asset"[1], zum Beispiel Aktien, Anleihen, Währungen oder Waren usw.)

- zu einem im Voraus festgelegten Preis und
- zu einem bestimmten zukünftigen Zeitpunkt

zu kaufen (verkaufen). Sie sind nicht weiter standardisiert und werden in der Regel im Telefonhandel vertrieben (OTC– oder over–the–counter–Geschäfte). Die Vermögenspositionen des Käufers und des Verkäufers eines Termingeschäfts im Zeitpunkt der Fälligkeit sind in Abbildung 1 dargestellt. Entspricht der Kassakurs (spot) im Zeitpunkt der Fälligkeit des Forwards dem vereinbarten Terminpreis F, ergibt sich für den Käufer des Forwards weder ein Verlust noch ein Gewinn. Liegt der Kassakurs über dem Terminpreis, erweist sich der Abschluss des Termingeschäfts als vorteilhaft, denn

[1] Auch Händler in Deutschland benutzen in diesem wie auch den folgenden Bezeichnungen die englischen Ausdrücke. Eine deutsche Übersetzung findet man praktisch gar nicht.

das *underlying asset* kann auf Grund des abgeschlossenen Termingeschäfts günstiger bezogen werden als am Markt. Sollte der Kassakurs jedoch unter dem Terminpreis liegen, resultiert ein Verlust. Die möglichen Vermögenspositionen des Verkäufers sind spiegelbildlich zu denen des Käufers.

Bei Forwards (für Futures gilt das übrigens ebenso) muss man genau zwischen dem Forward Preis und dem Marktpreis eines Forwards unterscheiden. Der Forward Preis (auch "delivery price" oder "Terminpreis") ist der im voraus festgelegte Preis, auf den sich die Vertragsparteien beim Abschluss des Vertrages einigen. Es ist der Preis, zu dem in $t_1 = t_2$ geliefert wird. Beide Parteien haben sich an diesen vereinbarten Preis F_0 bei Lieferung zu halten, er kann sich auf Grund der Struktur des Vertrages nicht in der Zukunft ändern. Allerdings wird der vereinbarte Preis natürlich von dem Zeitpunkt abhängen, an dem beide Parteien den Forward eingegangen sind – zu einem anderen Zeitpunkt werden die Erwartungen der Marktteilnehmer über die Situation bei Lieferung andere sein. Damit existiert nicht nur heute, in $t = 0$, sondern zu jedem Zwischenzeitpunkt t bis zum letzten möglichen Zeitpunkt $t_1 = t_2$ ein bestimmter Forward Preis F_t, der die Lieferbedingungen beider Vertragsparteien beschreibt.

Nehmen wir an, wir sind im Zeitpunkt $t = 0$ eine Verpflichtung eingegangen, das Gut im Fälligkeitszeitpunkt T zum Preis F_0 zu liefern. Da wir die Aktie dann verkaufen, bezeichnet man uns als Verkäufer des Forward. Man sagt auch, dass wir eine short position zum Preis F_0 eingegangen sind.

Einige Zeit später hat sich der Forward Preis geändert und liegt nun bei F_t. Unser ursprünglicher Vertrag verpflichtet uns aber immer noch zur Lieferung des Underlying zum Preis F_0. Nun sei weiter angenommen, wir wollten aus diesem Vertrag aussteigen und unsere Verpflichtungen veräußern. Wenn der aktuelle Forward Preis gestiegen ist ($F_t > F_0$), dann dürften wir Schwierigkeiten haben, jemanden zu finden, der freiwillig unsere Verpflichtungen übernimmt, da man jetzt offensichtlich am Kapitalmarkt mit einem analogen Vertrag mehr verdienen kann. Umgekehrt würden wir Geld verschenken, wenn der Forward Preis gesunken wäre ($F_t < F_0$) und wir ihn loswerden wollten.

Wenn wir in der Lage sein sollten, dennoch einen Käufer für unsere Verpflichtungen zu finden, so werden wir ihm eine Kompensation leisten müssen. Diese Kompensation wird die Differenz zwischen dem aktuellen Forward Preis F_t und dem in unserem Vertrag ursprünglichen Forward Preis F_0 entschädigt. Die Differenz $F_t - F_0$ beschreibt, wie hoch die Zahlungsdifferenz im Lieferzeitpunkt T sein wird. Will man aus dieser Größe den Wert des ursprünglichen Forwards im Zeitpunkt t bestimmen, so muss man diese Differenz (die ja in T fällig ist) auf den Zeitpunkt t diskontieren und erhält

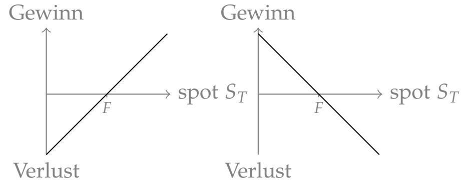
$$V_t = (1 + r_f)^{-(T-t)}(F_t - F_0)$$

V_t beschreibt also, was der ursprüngliche Forward im Zeitpunkt t kostet. Man sagt auch kürzer: Das ist der *Wert (Preis, Marktpreis) in t des Forwards* F_0.

Im Zeitpunkt des ursprünglichen Vertragsabschlusses, $t = 0$, ist der Marktpreis $V_0 = 0$. Danach wird er mit den Markterwartungen schwanken. Wenn S_T den Spot Preis des Underlyings bei Fälligkeit bezeichnet, dann ist zum Zeitpunkt der Fälligkeit der Marktpreis $V_T = S_T - F_0$. Weitere Zusammenhänge zwischen Forward Preis und Marktpreis werden wir in den Übungen kennen lernen.

Während Forwards ein passgenaues Produkt für die Risiken eines Unternehmens darstellen, haben sie einen nicht zu unterschätzenden Nachteil: zu jedem Verkäufer eines Forwards muss sich auch ein Käufer finden. Und nicht in allen Fällen stimmen die Bedürfnisse der Verkäufer und Käufer so überein, wie es bei einem Forward notwendig ist. Zum Anderen besteht für beide Seiten ein durchaus hohes Ausfallrisiko der anderen Partei. Diese Schwierigkeiten sind beim Future beseitigt.

Abbildung 1: Long- und Short-Position eines Forwards.



Futures Ein Future unterscheidet sich von einem Forward zuerst dadurch, dass er an einer Börse gehandelt wird. Das setzt voraus, dass die Verträge weitestgehend standardisiert sind, was die handelbaren Güter, Mengen, Erfüllungstermine und so weiter angeht. Das Einzige, worauf sich die Vertragspartner in der Börsensitzung verständigen müssen, sind der Preis und die Zahl der Kontrakte. Durch die Standardisierung vermeidet der Future ein Grundproblem beim Forward – es ist mit diesen Kontrakten viel einfacher, einen Vertragspartner zu finden, der bereit ist das Geschäft einzugehen.

Des weiteren erfolgen Abrechnung und Abwicklung nicht direkt zwischen den Vertragsparteien, sondern über besondere Kreditinstitute, die so genannten Clearinghäuser. Diese übernehmen jedem der Vertragspartner gegenüber die Garantie, dass der jeweils andere Vertragspartner seine Pflichten erfüllt. Käufer und Verkäufer müssen bei den Clearinghäusern Sicherheiten hinterlegen. Fällt also eine der beiden Seiten aus, so werden die Ansprüche der anderen Seite aus diesen Sicherheiten bedient. Damit ist bei einem Future kein Ausfallrisiko mehr gegeben.

Das Clearinghaus sichert die Vertragsparteien durch das marking–to–market ab. Dieses marking–to–market funktioniert wie folgt. Jede Vertragspartei muss während der Laufzeit des Vertrages ständig Sicherheiten hinterlegen. Diese Sicherheiten werden margins genannt. Es existieren zwei Arten von Zahlungen, die

Initial margin die in einigen Fällen zu Beginn des Vertrages zu leisten ist und die

Maintenance margin die zu zahlen ist, wenn der Preis des zugrunde liegenden Titels unter eine bestimmte Grenze sinkt.

Steigt der Preis des zugrunde liegenden Titels, so können die Sicherheiten entnommen werden. Schauen wir uns ein detailliertes

Beispiel einer solchen Transaktion an, wobei wir die Verhältnisse hier etwas vereinfachen.

Wir betrachten einen Future auf Lieferung einer Aktie im Zeitpunkt T. Im Zeitpunkt $t = 0$ beträgt der Futurepreis F_0. Wird nun in den Zeitpunkten $t = 1, \ldots, T$ ein weiterer Future wieder auf die Lieferung in T abgeschlossen, so werden aufgrund geänderter Marktkonditionen eventuell andere Lieferpreise vereinbart, die wir mit F_t bezeichnen werden. Sinnvollerweise muss der Preis im Endzeitpunkt F_T gerade dem aktuellen Aktienkurs S_T des Zeitpunktes T entsprechen.

Wir betrachten die Vertragspartei, die die Aktie zum Preis von F_0 am Zeitpunkt T liefern wird. Da diese Vertragspartei die Aktie verkauft, nennt man sie auch den Verkäufer des Future ("sie hält den Future short"). Versuchen wir zu verstehen, in welcher Höhe Sicherheiten von der Vertragspartei zu leisten sind. Das Clearinghaus verlangt der Einfachheit halber im Zeitpunkt $t = 0$ keine Sicherheiten.

Einen Zeitpunkt später, in $t = 1$, beträgt der Futurepreis eines (nunmehr neuen) Futures mit Lieferung in T gerade F_1. Das Clearinghaus verlangt als margin Zahlung nun genau die Differenz $F_1 - F_0$ vom Verkäufer des Future. Warum?

Würde unser Verkäufer durch Bankrott ausfallen, dann müsste das Clearinghaus einspringen und die Lieferverpflichtung übernehmen. Um diese Lieferverpflichtung zu übernehmen, würde das Clearinghaus einen neuen Future am Markt zum Preis von F_1 von einem Käufer erwerben und so seine eigene offene Position schließen. Allerdings beseitigt dies nicht vollständig das Risiko des Clearinghauses. Um die Lieferverpflichtung zu übernehmen, muss das Clearinghaus zum Preis von F_0 verkaufen. Das Clearinghaus erhält die Aktie aber später nur zu einem Preis von F_1. Das Clearinghaus würde bei diesem Geschäft den Betrag in Höhe von $F_1 - F_0$ verlieren. Diese margin verlangt das Clearinghaus nun vom Verkäufer. Das Geld wird dem Clearinghaus gut geschrieben.

Das Clearinghaus agiert dabei symmetrisch. Wenn also ein Verkäufer $F_1 - F_0$ zahlen muss, dann zahlt ein Käufer $F_0 - F_1$. Wenn sich der Futurepreis ändert, dann ist mindestens eine der beiden Zahlen negativ. Eine offene Position von -1 Geldeinheit heißt dabei nichts anderes, als dass das Clearinghaus diese offene Position dem Konto des Händlers (ob Verkäufer oder Käufer) gut schreibt. Der Händler kann über dieses Konto dann frei verfügen. Zinsen werden dem Konto nicht gutgeschrieben.

Die margins sichern somit, dass das Clearinghaus verlustfrei bleibt, auch wenn eine Vertragspartei ausfällt. Die Sicherheiten sind noch einmal in Tabelle 1 zusammengefasst. In der letzten Zeile haben wir die Summen aller margins zusammen gefasst. Dabei fällt folgendes auf. Konzentrieren wir uns wieder auf den Verkäufer. Er hat insgesamt $S_T - F_0$ gezahlt oder – auf Grund der Symmetrie – den Betrag $F_0 - S_T$ erhalten. Damit aber könnte er am Laufzeitende auch auf die Lieferung des Gutes verzichten, wenn er den Betrag

$F_0 - S_T$ vom Konto abhebt und das Gut auf dem Spotmarkt für S_T verkauft. Die Abhebung und der Verkauf ergeben für ihn insgesamt einen Erlös in Höhe von

$$S_T + F_0 - S_T = F_0,$$

und genau das war vereinbart. Genau ein solches Vorgehen nennen wir "glatt stellen" und es entspricht der üblichen Vorgehensweise an Terminmärkten: Statt einer pyhsischen Lieferung wird nur ein Ausgleich vom margin-Konto überwiesen.

Tabelle 1: Margin-Zahlungen bei einem Future.

t	Future-preis	margin in t zu leisten vom Käufer	Verkäufer
0	F_0	0	0
1	F_1	$F_0 - F_1$	$F_1 - F_0$
2	F_2	$F_1 - F_2$	$F_2 - F_1$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$T-1$	F_{T-1}	$F_{T-2} - F_{T-1}$	$F_{T-1} - F_{T-2}$
T	F_T	$F_{T-1} - F_T$	$F_T - F_{T-1}$
Σ		$F_0 - S_T$	$S_T - F_0$

Aufgrund der Standardisierung der Verträge kann es möglich sein, dass eine der Vertragsparteien Lieferengpässen ausgesetzt ist: Wenn beispielsweise alle Futurekontrakte über Öl an einem Tag im Monat terminieren, dann wird es schwer möglich sein, die vorgesehenen riesigen Ölmengen an eben diesem Tag zur Verfügung zu stellen. Daher weisen viele Futures eine Reihe von Besonderheiten auf. Zu diesen Besonderheiten gehört beispielsweise die *timing option*, wonach der Verkäufer des Future die Lieferung an jedem Geschäftstag eines Monats vornehmen kann. Selbstverständlich wird der Verkäufer, wenn er keine Lagerkosten hat, die Lieferung dann soweit wie möglich verzögern. Muss er das Produkt dagegen lagern, so könnte eine möglichst späte Lieferung jedoch Kosten verursachen.

Die *quantity option* erlaubt dem Verkäufer des Future, von der zu liefernden Menge in gewissen Grenzen abzuweichen. Der vereinbarte Futurepreis wird dann linear angeglichen. Da die Angleichung zu den am Lieferzeitpunkt gültigen Preisen erfolgt, stellt die quantity option keinen Vorteil für eine der beiden Vertragsparteien dar und hat eine eher geringfügige Bedeutung.

Die *quality option* erlaubt dem Verkäufer, bei der Lieferung aus einer vorher festgelegten Menge an qualitativ verschiedenen Gütern auszuwählen. Beispielsweise erlaubt die Chicagoer CBOT bei Mais Futures die Lieferung dreier verschiedener Sorten. Der benchmark ist Mais der Qualitätsstufe zwei. Wird dagegen Qualitätsstufe eins geliefert, so muss der Empfänger eine Prämie von einem halben Prozent zahlen. Bei Lieferung der Qualitätsstufe drei dagegen erhält er einen Discount von anderthalb Prozent. Bei Weizen Futures hat man sogar die Wahl zwischen elf verschiedenen Qualitätsstufen. Sinnvollerweise wird der Verkäufer des Futures denjenigen Weizen wählen, der für ihn die niedrigsten Kosten verursacht. Man spricht daher auch von einer cheapest–to–deliver option (auch CTD abgekürzt).

Die *location option* existiert nur für Futures auf physische Güter (Waren). Sie erlaubt dem Verkäufer, die Waren an vorher bestimmte Orte zu liefern. Diese Option erweist sich dann als sinnvoll, wenn die Aufbewahrung der Güter am Lieferort durch Lagerengpässe verteuert wird.

Eine der wichtigsten Optionen ist die *wildcard option*. Sie ist dann von Bedeutung, wenn der spot Markt nach dem Markt für Futures schließt. Ereignet sich zwischen beiden Zeitpunkten etwas unvor-

2 Bewertung von Derivaten – ein erster Versuch

2.1 Das Gesetz des einheitlichen Preises

Lernziel: Identische Produkte müssen auch identische Preise haben. Dies nennen wir das Gesetz des einheitlichen Preises

Bei der Bewertung von Derivaten – und bei allen anderen Finanzmarktprodukten – spielt das Grundprinzip der Arbitragefreiheit eine herausragende Rolle: Wir verstehen darunter das Prinzip, dass auf gut funktionierenden Kapitalmärkten keine Arbitragen möglich sind. Arbitragegewinne sind – wir werden das später noch genauer definieren – Gewinne ohne Einsatz von Kapital. Diese darf es nicht geben, da offensichtlich sonst jeder versuchen würde, diese Art von Gewinnen zu machen. Als einfachstes Beispiel für Arbitragegeschäfte sei auf Preisdifferenzen des gleichen Wertpapiers an verschiedenen Börsenplätzen hingewiesen. Ohne Transaktionskosten könnte man in diesem Fall das Wertpapier an derjenigen Börse kaufen, an der es billiger zu haben ist, und an dem Handelsplatz, an dem es teurer ist, wieder verkaufen. Damit macht man positive Gewinne, ohne Kapital einzusetzen. Dies ließe sich theoretisch unendlich oft wiederholen, was zwangsläufig zu Preisänderungen an beiden Handelsplätzen führen würde, so dass nach kurzer Zeit die Preise des Wertpapiers an beiden Orten wieder identisch wären. In der Realität tauchen Arbitragegelegenheiten zwar auf, werden aber wie in dem obigen Beispiel sofort von sogenannten Arbitrageuren – Marktteilnehmer, die nichts anderes tun, als die Märkte nach solchen Gelegenheiten zu durchsuchen – ausgenutzt und daher schnell wieder zunichte gemacht. Wir gehen also im Folgenden davon aus, dass identische Produkte immer identische Preise haben. Dies nennt man auch das Gesetz des einheitlichen Preises. Es ist die erste Bedingung für Arbitragefreiheit, die wir kennen lernen werden.

Arbitragegeschäfte nutzen häufig so genannte *Leerverkäufe* (auf englisch "short selling"). Ein Leerverkauf bedeutet den Verkauf eines Wertpapiers, das man gar nicht besitzt, mit dem Ziel es später – möglichst billiger – zurückzukaufen. Leerverkäufe sind Transaktionen, die nur bestimmten institutionellen Marktteilnehmern wie zum Beispiel Hedge Fonds erlaubt sind. Man kann sich dies auch so vorstellen, dass die zu verkaufenden Wertpapiere von anderen Marktteilnehmern geborgt und sofort am Spotmarkt verkauft werden. Als borgender Investor ist man dann üblicherweise verpflichtet, den Leihgebern anfallende Dividenden- oder Zinszahlungen aus der eigenen Tasche zu bezahlen.[14] Bei Leerverkäufen verlangen die Aktienhändler erhebliche Sicherheiten, die aber auch in Form anderer Wertpapiere erbracht werden können und die man beim Gegengeschäft zurück erhält, so dass sie keine echten Ausgaben darstellen.

[14] Diese anfallenden Dividenden- und Zinszahlungen stellen eine Art Leihgebühr dar.

2.2 *Put–Call–Parität für europäische Vanilla–Optionen*

Lernziel: Wir wenden das Gesetz des einheitlichen Preises auf den Zusammenhang von Put-, Call- und Aktienpreis an.

Wir wollen in diesem Abschnitt einen fundamentalen Zusammenhang von Put– und Callpreisen herleiten, der als Put–Call–Parität bekannt ist. Dazu gehen wir von einem Modell mit zwei Zeitpunkten und einer unsicheren Zukunft aus. Eine Aktie werde heute zum Preis S_0 gehandelt und verspreche in der Zukunft einen unsicheren Ertrag $\tilde{S}_1$. Ebenso werde heute ein europäischer Call zum Preis von C_0 und ein europäischer Put zum Preis von P_0 angeboten.

Ein Marktteilnehmer, der

- eine Aktie erwirbt,
- einen europäischen Put kauft und
- einen europäischen Call verkauft,

nimmt eine vollkommen risikolose Position ein. Dabei gehen wir davon aus, dass beide Optionen auf die gleiche Aktie geschrieben werden, diese Aktie während der Laufzeit keine Dividenden zahlt und beide Optionen das gleiche Verfalldatum und einen identischen Ausübungspreis K haben. Betrachten wir Abbildung 7. Die

Finanztitel	Preis in $t = 0$	Rückflüsse in $t = 1$	
		$\tilde{S}_1 > K$	$\tilde{S}_1 \leq K$
Kauf einer Aktie	S_0	$\tilde{S}_1$	$\tilde{S}_1$
Kauf einer Verkaufsoption	P_0	0	$K - \tilde{S}_1$
Verkauf einer Kaufoption	$-C_0$	$K - \tilde{S}_1$	0
Portfolio	$S_0 + P_0 - C_0$	K	K

Abbildung 7: Risikoloses Portfolio.

Tabelle enthält eine Fallunterscheidung bei den Rückflüssen im Zeitpunkt $t = 1$: entweder ist der zufallsabhängige Aktienkurs $\tilde{S}_1$ dann größer als der Basispreis oder nicht.

- Betrachten wir zunächst die Aktie. Ihr künftiger Kurs $\tilde{S}_1$ ist nicht vorhersehbar.
- Wer eine Verkaufsoption erworben hat, wird diese ausüben, wenn später der Zustand $\tilde{S}_1 < K$ eintritt. Gegen Lieferung der Aktie erhält man vom Stillhalter den Basispreis. Also belaufen sich die Rückflüsse auf $K - \tilde{S}_1$.

  Tritt der aus Sicht des Putkäufers ungünstige Zustand auf, so ist die Verkaufsoption wertlos und verfällt.
- Durch den Verkauf der Kaufoption erwirbt der Käufer das Recht, die Aktie zu kaufen, wenn dieser das wünscht. Die Ausübung wird stattfinden, wenn der Zustand $\tilde{S}_1 > K$ eintritt. Auch in diesem Fall belaufen sich die Rückflüsse auf $K - \tilde{S}_1$. Sie sind offensichtlich negativ.

  Tritt dagegen die Situation $\tilde{S}_1 < K$ ein, so wird der Callkäufer darauf verzichten, die Option auszuüben.

Die Tabelle zeigt deutlich, dass die Rückflüsse im Zeitpunkt $t = 1$ ebenso groß sein werden wie der Basispreis K. Die Erklärung ist einfach. Dadurch, dass wir sowohl einen Put kaufen als auch einen Call verkaufen, sorgen wir dafür, dass die Aktie im Zeitpunkt $t = 1$ auf jeden Fall zum Preis K verkauft wird. Damit sind die künftigen Einnahmen absolut sicher. Wir haben aus drei – zum Teil höchst riskanten – Komponenten ein vollkommen risikoloses Portfolio konstruiert. Der Preis dieses Portfolios muss auf einem arbitragefreien Markt daher dem mit dem risikofreien Zins r_f diskontierten Basispreis K entsprechen. Mithin gilt der als Put–Call–Parität bezeichnete Zusammenhang

$$(1 + r_f)(S_0 + P_0 - C_0) = K. \tag{2}$$

Dieser Zusammenhang, das hat unser Beweis deutlich gemacht, ist sehr allgemein. Wir haben bisher nur unterstellt, dass es sich um europäische Optionen handelt und der zukünftige Aktienkurs unsicher ist. Sind diese beiden Voraussetzungen erfüllt, dann müssen die Preis der beiden vanilla Optionen und der Aktie in der oben genannten Relation befinden. Anderenfalls "liegt irgendwo Geld auf der Straße" und man kann eine einfache Arbitragegelegenheit erzeugen.

Wenn Sie allerdings glauben, mit dieser Relation schnell und einfach Geld verdienen zu können, so seien Sie auf der Hut: Die Gleichung (2) gilt nur, wenn wir es mit *europäischen* Optionen zu tun haben. Liegen dagegen, wie auf den realen Finanzmärkten üblich, nur amerikanische Optionen vor, dann stimmt die Gleichung nicht mehr. Amerikanische Optionen kann man vorher ausüben und damit fällt unsere Argumentation schnell in sich zusammen – und Ihr vermeintlich sicherer Arbitragegewinn vermutlich auch.[15]

[15] Es gibt noch ein weiteres und nicht zu unterschätzendes technisches Problem. Der Kauf/Verkauf der drei Titel muss *gleichzeitig* erfolgen. Bei besonders liquiden Mitteln ist das eine logistische Herausforderung – hier kann eine Sekunde Verspätung den Arbitragevorteil zunichte machen, weil sich dann bereits ein anderer Aktienkurs eingestellt haben kann.

2.3 *Futures und Forwards (Zinsstrukturkurve)*

Lernziel: Wir zeigen, wie sich forward-Zinsen aus Kassazinsen errechnen lassen. Wir erkennen, dass bei deterministischen Kassazinssätzen Forwards und Futures identische Preise haben müssen.

Wir wollen uns bei der Diskussion über den Zusammenhang von Forward– und Futurepreisen mit festverzinslichen Wertpapieren beschäftigen. Dazu gehen wir von folgendem Modell aus. Es gebe in der Zukunft T Zeitpunkte, die Zukunft sei sicher.[16] Wir betrachten nur festverzinsliche Wertpapiere ("bonds"), die Zahlungen in diesen Zeitpunkten versprechen. Bevor wir auf die Forwards und Futures eingehen, wollen wir den Kassamarkt genauer betrachten.

[16] Es ist formal nicht so einfach, in einem Modell mehrere Zeitpunkte und Unsicherheit zu vereinen.

Betrachten wir dazu ein festverzinsliches Wertpapier, das eine Zahlung von genau einer Geldeinheit in einem Zeitpunkt t verspreche und sonst keine weiteren Zahlungen leiste (der Nennwert dieser Anleihe ist also € 1). Man bezeichnet einen solchen Titel auch als Zerobond. Dieser Zerobond möge heute $Z_0(t)$ kosten. Der Preis dieses Zerobonds hängt von den Zinssätzen ab, die an den

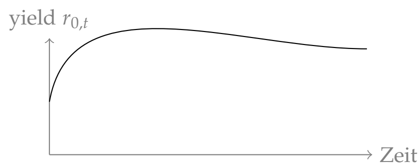
Kapitalmärkten vorherrschen. Dabei unterscheiden sich die Zinssätze entsprechend den Laufzeiten, die diese Zerobonds aufweisen. Wir wollen einen einjährigen Zinssatz für eine Geldanlage vom Zeitpunkt 0 bis zum Zeitpunkt t mit $r_{0,t}$ bezeichnen (im englischen spricht man vom "yield"). Dabei handelt es sich immer um einen auf das Jahr (bzw. eine Zeiteinheit) normierten Zins, für den Preis des Zerobonds gilt also

$$Z_0(t) = \frac{1}{(1+r_{0,t})^t}.$$

Durch die Angabe der Kassazinsätze $r_{0,t}$ oder die Angabe der Preise für Zerobonds ist der Kassamarkt vollständig beschrieben.

Im Rahmen unseres Modells können wir noch keine weiteren Aussagen über die Höhe der einzelnen Kassazinssätze treffen. Eine Abbildung, die die verschiedenen Kassazinssätze $r_{0,t}$ auf einer Zeitachse abträgt, heißt Zinsstrukturkurve ("term structure" oder "yield curve"). Ein Beispiel einer solchen Zinsstrukturkurve ist in Abbildung 8 dargestellt. Man beobachtet an den Finanzmärkten verschiedene Formen von Zinsstrukturkurven. Die Abbildung 8 zeigt einen wachsenden Verlauf, und diese Verlaufsform ist durchaus typisch. Es ist aber auch möglich, dass die Zinsstrukturkurve fallend ist (wenngleich solch ein Zustand typischerweise nur von kurzer Dauer ist) und auch Strukturkurven mit Buckeln ("humped term structure") wurden beobachtet.

Abbildung 8: Zinsstrukturkurve.



Wir konzentrieren uns nun auf Forwards sowie auf Futures für Zinsprodukte. Wir betrachten einen Forward–Vertrag, bei dem heute ein Kredit in einem zukünftigen Zeitpunkt vereinbart wird. Eine Vertragspartei will sich im Zeitpunkt t einen bestimmten Geldbetrag für eine Periode borgen. Auf welchen Zinssatz bei der Anlage einigen sich die Parteien, wenn die Spotzinsen bekannt sind?

Satz 2.1 (Forwards) *Der heute vereinbarte annualisierte Forwardzins $r_{t,t+1}$ auf eine Geldanlage von t bis $t+1$ ergibt sich aus den heutigen annualisierten Kassazinssätzen $r_{0,t}$ und $r_{0,t+1}$ wie folgt*

$$\frac{1}{1+r_{t,t+1}} = \frac{(1+r_{0,t})^t}{(1+r_{0,t+1})^{t+1}}.$$

Beweis: Um den beim Forward vereinbarten Zins zu ermitteln, greifen wir zu folgender Überlegung. Wir betrachten einen Forwardkredit von t bis $t+1$, den ein Investor heute aufnimmt. Der Investor will heute den Geldbetrag $F_0 G$ borgen.

Des weiteren betrachten wir zwei Kassageschäfte, die der Investor statt dessen eingehen kann. Er legt Geld von heute bis zum Zeitpunkt t an und gleichzeitig borgt er sich für den Zeitraum von heute bis $t+1$ denselben Betrag am Kapitalmarkt. Wir nennen G' den Geldbetrag, den er in 0 über die Laufzeit t anlegt und über die Laufzeit $t+1$ gleich wieder borgt. Dieses Geschäft wollen wir hier "gekoppeltes Kassageschäft" nennen.

Bisher haben wir über die Höhe von G' sowie von G keine Aussagen getroffen. Wir nehmen nun an, den Geldbetrag so zu wählen, dass beide Zahlungen in t die gleiche Höhe aufweisen:

$$F_0 G = (1 + r_{0,t})^t G' .$$

Abbildung 9 illustriert unsere Überlegungen. In der Grafik sehen wir drei Verbindungslinien, die den beiden Kassageschäften und dem Forwardgeschäft entsprechen. Das Forwardgeschäft ist dabei ganz oben gekennzeichnet, die gekoppelten Kassageschäfte sind visuell miteinander verbunden und etwas tiefer abgebildet. Auf den Verbindungslinien sind jeweils ein Plus- und ein Minuszeichen notiert. "Plus" bedeutet dabei, dass dieses Geschäft zu einer Zahlung für unseren Investor führt; "Minus" heißt, dass unser Investor zahlen muss. Auf den Linien finden Sie die jeweiligen effektiven Zinssätze der einzelnen Verträge.

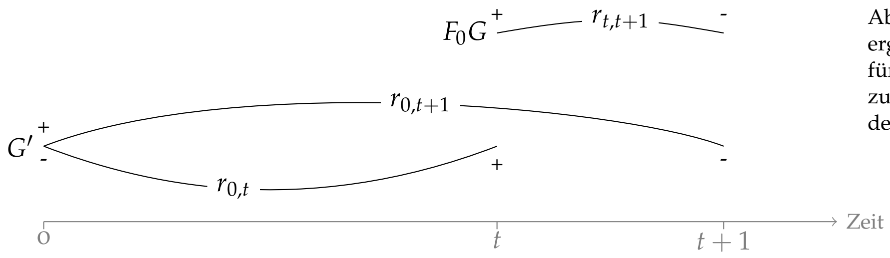


Abbildung 9: Zwei Kassageschäfte ergeben ein Forwardgeschäft. + steht für Zahlungen, die dem Investor zufließen; − steht für Zahlungen, die der Investor aufzubringen hat.

In den Zeitpunkten $0, 1, \ldots, t-1$ betragen die Nettozahlungen sowohl beim gekoppelten Kassageschäft als auch beim Forward jeweils 0, da sich beim Kassageschäft Anlage und Kreditaufnahme ausgleichen oder gar keine Zahlungen vorgesehen sind. Im Zeitpunkt t erhalten wir beim gekoppelten Kassageschäft den zu Beginn investierten Geldbetrag; da wir G' anlegten, sind das $(1 + r_{0,t})^t G'$. Beim Fowardgeschäft erhalten wir den geborgten Geldbetrag in Höhe von $F_0 G = (1 + r_{0,t})^t G'$.

Einen Zeitpunkt später, also in $t + 1$, lösen sowohl der Forward als auch das gekoppelte Kassageschäft Zahlungen aus. Wenden wir uns zuerst dem Forward zu. Entsprechend den damals getroffenen Vereinbarungen hat der Investor gerade G zu zahlen. Andererseits könnte er genau so gut das gekoppelte Kassageschäft abgeschlossen haben und müsste dann den Kredit tilgen, den er in 0 aufgenommen hatte. Dies führt zu Zahlungen in Höhe von $(1 + r_{0,t+1})^{t+1} G'$.

Weil beide Geschäfte (das gekoppelte Kassageschäft am Kassamarkt und die Vereinbarung des Forwards) sich aber äußerlich bis zum Zeitpunkt t überhaupt nicht unterscheiden, ist nicht einzusehen, warum am letzten Zeitpunkt die Zahlungen unterschiedlich sein sollen. Das gekoppelte Geschäft und der Forward haben identische Zahlungsströme und identische Zahlungsstrukturen über die Zeit. Also müssen die Ergebnisse in $t + 1$ auch identisch sein. Wären die Renditen beider Geschäfte unterschiedlich, so könnte jedermann durch ein so genanntes Arbitragegeschäft einen beliebig hohen Geldbetrag am Kapitalmarkt erzielen, ohne dafür selbst Kapital aufwenden zu müssen und ohne jegliches Risiko einzugehen. Solche Situationen können an Kapitalmärkten keinen Bestand