Stochastische Kapitalkosten

Von Dominica Canefield, Boston, Prof. Dr. Dr. h.c. Lutz Kruschwitz und Univ.-Prof. Dr. Dr. Andreas Löffler, Freie Universität Berlin*)

In der Literatur wird bis heute durchgehend unterstellt, dass die Kapitalkosten eines Unternehmens deterministische Größen sind. Ohne eine solche Annahme kann man keine der bekannten Bewertungsgleichungen notieren.

In diesem Überblicksartikel wollen wir die wichtigsten Ergebnisse eines Arbeitspapiers wiedergeben, in dem (nach unserer Ansicht zum ersten Mal) versucht wird, die Annahme deterministischer Kapitalkosten aufzugeben und zu unterstellen, dass die Kapitalkosten selbst stochastische Größen sind. Wir zeigen, welche konzeptionellen Fragen dabei gelöst werden müssen, damit diese Theorie in sich konsistent bleibt und was dies für die dann resultierende Fassung der Gordon-Shapiro-Gleichung bedeutet. Erste empirische Untersuchungen werden durchgeführt, bei denen die wichtigsten Ergebnisse zumindest nicht sofort widerlegt werden.

1 Motivation

Unternehmensbewertung ist und bleibt ein in Theorie und Praxis intensiv diskutiertes Thema. Dabei stellen die Kapitalkosten einen zentralen Begriff dar. Bisher geht man in der Literatur ausnahmslos davon aus, dass Kapitalkosten sichere Größen sind. In einem bislang noch nicht begutachteten Diskussionspapier haben wir kürzlich einen Vorschlag entwickelt, wie man mit stochastischen Kapitalkosten rechnen könnte.[1] Die dort entwickelten Ideen, die für die Unternehmensbewertung interessant sein könnten, wollen wir im vorliegenden Artikel skizzenhaft präsentieren.

Wer sich zu methodischen Fragen der Unternehmensbewertung äußert, ist gut beraten, die Begriffe Wert und Preis sorgfältig auseinander zu halten. In der Finanzierungstheorie findet eine sorgfältige Trennung dieser beiden Begriffe meist nicht statt, vielmehr ist regelmäßig von value die Rede.[2] Zudem macht es einen großen Unterschied, ob börsennotierte Unternehmen zu bewerten sind oder ob man eine Gesellschaft vor sich hat, für deren Preisentwicklung nahezu keine verlässlichen historischen Daten vorliegen. Sind die Informationen über das zu bewertende Unternehmen jedermann bekannt? Oder müssen sie erst unter Inkaufnahme nennenwerter Kosten erworben werden? Sind die Anteile am Unternehmen fungibel oder ist Handel nur mit hohen Transaktionskosten möglich?

*) *Dominica Canefield* ist CFO der Care One Corporation in Boston (MA), Prof. Dr. Dr. h.c. *Lutz Kruschwitz* ist pensionierter Hochschullehrer am Institut für Bank- und Finanzwirtschaft der Freien Universität Berlin. Univ.-Prof. Dr. Dr. *Andreas Löffler* ist aktiver Hochschullehrer am selben Institut, Thielallee 73, 14195 Berlin. E-Mail: dc@wacc.de, lk@wacc.de und al@wacc.de. *Wolfgang Ballwieser* hat sich mit unseren Ideen gründlich auseinandergesetzt und uns auf manche Schwäche aufmerksam gemacht. Für seine wertvollen und preiswerten Hinweise sind wir ihm zu großem Dank verpflichtet. Ein anonymer Gutachter gab uns weitere nützliche Ratschläge.

1 Siehe http://dx.doi.org/10.2139/ssrn.3761127.

2 Eine bemerkenswerte Ausnahme machen *Bodie/Kane/Marcus* (2013, S. 594 f.), die sorgfältig zwischen „price" und „intrinsic value" unterscheiden.

Wenn wir im vorliegenden Beitrag allgemein von Unternehmensbewertung sprechen, so haben wir doch einen recht speziellen Fall im Blick. Wir werden nämlich ein Unternehmen betrachten, das börsennotiert ist und dessen Aktien einem nennenswerten Handel unterliegen. Informationen über das Unternehmen sollen kostenlos erhältlich sein. Wir sprechen von Preisen, wenn historische Transaktionsgrößen gemeint sind. Solche Preise können leicht beobachtet werden. Es ist überflüssig, weitere Annahmen einzuführen. Von Werten sprechen wir dagegen dann, wenn es sich um (möglicherweise individuelle) Grenzpreise für zukünftige Transaktionen handelt. Damit ist sofort klar, dass hierfür ein Kalkül oder eine Theorie notwendig ist, die erklärt, wie denn ein Bewerter zu solchen Größen gelangen soll. Ein derartiges Kalkül muss sich an den Annahmen messen lassen, die unterstellt werden.

Wenn im Folgenden von Aktienkursen gesprochen wird, kann es sich – wie oben erwähnt – entweder um Preise oder um Werte handeln. Im Interesse der Präzision wollen wir daher Preise von Aktien und Werte von Aktien unterscheiden, obwohl dies sprachlich bislang eher selten so gemacht wird. Wir werden ein und dasselbe Symbol für (vergangene) Preise und (zukünftige) Werte benutzen, und zwar V_t.

Wer ein Unternehmen bewertet, unterstellt in der Regel, dass es unendlich lange existieren wird. Andernfalls müsste man für das Laufzeitende einen endlichen Betrag ansetzen, für den es so gut wie nie brauchbare Anhaltspunkte gibt. Geht man von unendlicher Lebensdauer aus, so ist es weiter hilfreich, für die dauerhaft zu erwartenden Cashflows einen eingeschwungenen Zustand anzunehmen – man spricht auch von einem steady state –, weil dies die Überlegungen stark vereinfacht. Bewertungspraktiker arbeiten in der Regel mit einem sog. Phasenmodell, wobei die ersten drei bis fünf Jahre die Detailplanungsphase darstellen, während alle folgenden Jahre als Rentenphase bezeichnet werden. Wir konzentrieren uns im Folgenden auf diese zweite Phase, was sich auch deswegen rechtfertigen lässt, weil sie regelmäßig den bei Weitem überwiegenden Beitrag zum Gesamtwert leistet.

Im einfachsten Fall unterstellt man, dass die Cashflows ein so genanntes Martingal bilden. Darunter versteht man eine Situation, in der bei einem konstant bleibendem Erwartungswert die Cashflows mit fortschreitender Zeit immer unsicherer werden, weswegen der gegenwärtige Cashflow auch als bester Schätzer der erwarteten künftigen Cashflows angesehen werden kann. Diese Annahme formuliert man üblicherweise unter Verwendung des Symbols CF_t für die Cashflows in der Form[3]

$$E[CF_{t+1} \mid F_t] = CF_t. \tag{1}$$

Man kann diese Bedingung gut mit einem Modell veranschaulichen, das so wie Abbildung 1 in jedem Zeitpunkt endlich viele Zustände hat. Die Bedingung besagt dann nicht nur, dass die Cashflows im Erwartungswert nicht wachsen, sondern dass dies zudem für jeden einzelnen Knoten gilt. Abbildung 1 illustriert das mit einem überschaubaren Zahlenbeispiel.

3 Dabei bezeichnet man den Informationsstand, von dem der Bewerter heute annimmt, dass er ihn im Zeitpunkt t besitzen wird, mit F_t (siehe dazu Abschnitt 2.2 in *Kruschwitz* und *Löffler* (2020)).

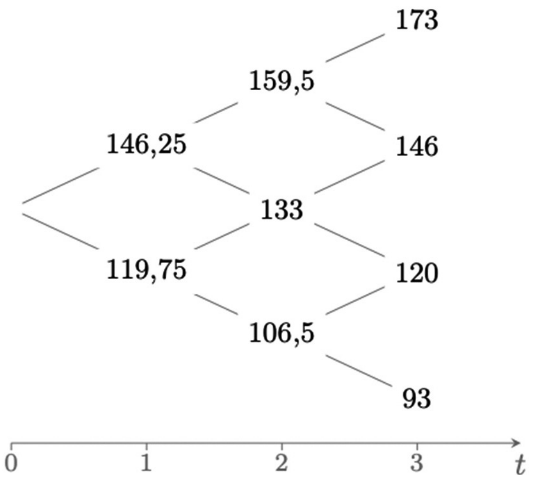

Abbildung 1: Zur Illustration der Martingalannahme (1)

Man erkennt drei künftige Zeitpunkte $t = 1,2,3$. Die Cashflows können an diesen Zeitpunkten verschiedene Zahlenwerte annehmen. Von jedem beliebigen Knoten des Baums aus gibt es zwei Möglichkeiten, wie sich die Cashflows im folgenden Zeitpunkt weiter entwickeln können. Beide Möglichkeiten sollen jeweils gleich wahrscheinlich sein. Mit einfachen Rechnungen lässt sich verifizieren, dass das Beispiel die Bedingung (1) in jedem Knoten erfüllt: Die erwartete Wachstumsrate in Höhe von $0\,\%$ ergibt sich exemplarisch für den Knoten $106{,}5$ aus

$$\frac{\frac{1}{2}\cdot 120 + \frac{1}{2}\cdot 93}{106{,}5} - 1 = 0.$$

Die Leserin mag unsere Behauptung für die anderen Knoten selbst überprüfen.

Unternehmensbewerter sprechen in diesem Fall von einer gleichbleibenden ewigen Rente. Wenn nun auch noch die Kapitalkosten k des Unternehmens konstant sind, dann kann man zeigen, dass die Bewertung des Unternehmens mit Hilfe der nachfolgenden, sehr einfachen Bewertungsgleichung gelingt

$$V_t = \frac{CF_t}{k}. \tag{2}$$

Diese Relation wird gern Gordon-Shapiro-Gleichung genannt.[4]

Vor dem Hintergrund dieser Gordon-Shapiro-Gleichung kann unsere Idee sehr leicht motiviert werden. Wir zeigen, unter welchen Bedingungen in der Gleichung (2) die Kapitalkosten k unsicher werden könnten. Im Ergebnis bedeutet das, dass die Gleichung (2) nun die Form

4 Siehe *Gordon* und *Shapiro* (1956), aber auch schon *Williams* (1938). Allerdings haben alle genannten Autoren nicht zufällige Cashflows betrachtet, sondern sind von reellen Zahlen ausgegangen. Unsere Formulierung gilt auch dann, wenn zukünftige Unternehmenswerte und Cashflows unsicher sind.

$$V_t = \frac{CF_t}{\kappa_t} \tag{3}$$

annimmt, wobei jetzt der stochastische Term κ_t an die Stelle der deterministischen Kapitalkosten k tritt. Die Zufallsvariable κ_t muss dabei im Gegensatz zur klassischen Gordon-Shapiro-Gleichung einen Zeitindex t tragen, weil bei Zufallsvariablen auszuschließen ist, dass sie im Zeitablauf konstant bleiben.[5] Wenn κ_t zudem unabhängig von den Cashflows ist, besagt Gleichung (3), dass nun nicht mehr nur eine, sondern eine zweite stochastische Größe die Unsicherheit des Wertes einer Aktie beeinflusst.

Bei flüchtiger Betrachtung könnte man mutmaßen, dass es sich bei Gleichung (3) bloß um ein Konzept handelt, das mehr oder minder aus der Luft gegriffen ist, um ein Konzept also, das nicht mit klaren logischen Schritten aus einem sauber formulierten theoretischen Modell hergeleitet wurde. Träfe dieser Verdacht zu, verdiente der Ansatz keine besondere Aufmerksamkeit. Er unterschiede sich im Grunde nicht von sog. Multiplikatorverfahren der Unternehmensbewertung, bei denen die gesuchten Werte aus irgendwelchen Kenngrößen abgeleitet werden. Man gibt – ohne auf ein theoretisches Modell zurückzugreifen – eine wie auch immer geartete Größe (hier: Quotient von Cashflow und Unternehmenswert) vor und zeigt bestenfalls anhand von historischen empirischen Daten, dass eine bestimmte Regularität vorliegt, deren Vorhandensein man dann ohne große Bedenken in die Zukunft fortschreibt. Nun wird aber alles andere als grundlos vor der Verwendung einfacher Multiplikatoren gewarnt; so schreiben etwa *Ballwieser/Hachmeister* (2021, S. 262), dass die Vorteile einer bequemen Nutzung „[nicht] überzeugen". Diese Kritik beruht vor allem auf dem Argument, dass es keine stichhaltigen Begründungen für die Höhe des jeweiligen Multiplikators gibt.

Die von uns propagierte Gleichung (3) ist allerdings keine Ad-hoc-Annahme. Vielmehr lässt sie sich aus einer geschlossenen Theorie herleiten, besitzt also eine tragfähige wissenschaftliche Grundlage. Diese Behauptung wollen wir im nächsten Abschnitt genauer begründen. Dazu müssen wir allerdings zunächst einen Blick auf die Herleitung der klassischen Gordon-Shapiro-Relation werfen.

2 Grundidee und das Modell

2.1 Annahmen zu Kapitalkosten

Bei den Kapitalkosten handelt es sich um einen elementaren Grundbegriff der Finanzierungstheorie. Umso erstaunlicher ist es, dass man in den meisten Lehrbüchern (insbesondere im angelsächsischen Raum) keine exakte formale Definition des Begriffs findet. So ist davon die Rede, dass es sich um Opportunitätskosten handelt oder dass man es mit einer Rendite zu tun hat, ohne dass weiter in Details gegangen wird.[6] Aber eine präzise Definition ist deswegen erforderlich, weil wir Kapitalkosten sehr häufig in einem streng formalen Zusammenhang wiederfinden, üblicherweise in Bewertungsgleichungen der Form

5 Im Zeitpunkt $t = 0$ sind Cashflows, Wert und κ_t sichere Größen.
6 Siehe beispielsweise *Pratt* und *Grabowski* (2014, S. 3]. *Armitage* (2005, S. XIII) charakterisiert Kapitalkosten als „the minimum expected rate of return the project needs to offer to attract the money required".

$$V_0 = \sum_{t=1}^{\infty} \frac{E\left[CF_t\right]}{(1+k)^t}. \tag{4}$$

Die klassische Gordon-Shapiro-Gleichung lässt sich aus dieser Relation logisch ableiten, wenn man die Martingalannahme (1) und konstante Kapitalkosten k unterstellt.

Wir werden jetzt auf die Voraussetzungen eingehen, die in Gleichungen wie (4) unterstellt werden. Diese Annahmen wurden z. B. in *Kruschwitz* und *Löffler* (2020, Abschnitt 2.3.2) wie folgt herausgearbeitet:

Definition: Zuerst muss definiert werden, was unter Kapitalkosten verstanden werden soll. Nach unserer Auffassung definiert man Kapitalkosten zweckmäßigerweise als *bedingte* erwartete Renditen, also

$$k := \frac{E[V_{t+1}+CF_{t+1}|\mathcal{F}_t]}{V_t} - 1. \tag{5}$$

Diese Definition lässt sich wie folgt in Worte fassen. Kapitalkosten beschreiben, welche Verzinsung ein Finanztitel innerhalb eines Jahres im Erwartungswert verspricht. Eine einfache Umformung dieser Definitionsgleichung ergibt die Iterationsbeziehung

$$V_t = \frac{E[V_{t+1} + CF_{t+1}|\mathcal{F}_t]}{1+k}, \tag{6}$$

auf die wir später noch genauer eingehen werden.

Wir halten die angegebene Definition für zweckmäßig, wollen aber nicht verhehlen, dass sie eine bemerkenswerte Schwäche besitzt. Der Erwartungswert, den wir in der Definition verwenden, besitzt eine Besonderheit, die man bei nicht genügend gründlicher Lektüre womöglich übersieht. Es handelt sich nicht um den klassischen Erwartungswert, der einer Zufallsvariablen eine reelle Zahl, also so etwas wie ihren durchschnittlichen Wert, zuordnet. Vielmehr verweist das Symbol F_t auf einen bedingten Erwartungswert – also eine Durchschnittsbildung, die sich an mehreren möglichen Bedingungen orientiert. Damit kann dieser Erwartungswert zufällig sein, was unmöglich macht, ihn mit einer einfachen Zahl darzustellen, und neue Probleme aufwirft.

Kapitalkosten gemäß Definition (5) sind dann nämlich nicht zwangsläufig sicher, da sowohl der Zähler als auch der Nenner in Gleichung (5) unsicher sein könnten. Unter diesen Bedingungen muss man sich mit der Frage auseinandersetzen, wie man mit so definierten Größen zu praktisch handhabbaren Bewertungsgleichungen kommen kann.

Annahme: Man kann sich einer heroischen (und damit zweifellos recht problematischen) Annahme bedienen. Man schließt einfach per definitionem aus, dass die bedingten erwarteten Renditen unsicher sind, und unterstellt stattdessen, dass es sich um gewöhnliche Zahlen, also um deterministische Größen, handelt.

Diese Vorgehensweise hat Kritik hervorgerufen.[7] Wer besitzt schon die prophetische Gabe, heute mit Gewissheit vorhersagen zu können, welche Renditen mit einzelnen Finanztiteln im kommenden Jahr erwirtschaftet werden? Es ist versucht worden, die hier skizzierten Voraussetzungen der DCF-Theorie abzumildern. Dabei wurden zwar gewisse Fortschritte erzielt,[8] im Großen und Ganzen aber muss man sagen, dass es

7 Siehe beispielsweise *Rapp* (2006) oder *Laitenberger* (2006). Der Beitrag von *Meitner* und *Streitferdt* (2014) enthält eine gute Übersicht über die Literatur zu diesem Thema.

8 So erweiterte *Rapp* (2006) die Überlegungen auf zeit- und teilweise zustandsabhängige Kapitalkosten, *Laitenberger* (2006) konnte Autokorrelationen der Renditen berücksichtigen.

bis heute nicht gelungen ist, eine Bewertungsgleichung der Form (4) (und damit auch die Gordon-Shapiro-Version (2)) herzuleiten, ohne dabei auf deterministische Kapitalkosten zu verzichten. Wir wollen nun beschreiben, wie man dieses Problem überwinden kann und was geschehen muss, wenn man stochastische Kapitalkosten zulassen will. Zudem werden wir diskutieren, welche empirischen Herausforderungen sich aus dieser neuen Idee ergeben.

Hierzu muss man aber verstehen, an welcher Stelle sich bei stochastischen Kapitalkosten Schwierigkeiten ergeben. Es hilft, dazu die Herleitung genauer zu betrachten, die man im deterministischen Fall anzuwenden pflegt; betrachten wir dazu den Beweis der Gordon-Shapiro-Gleichung. Dazu nehmen wir für einen Moment an, die Kapitalkosten würden durch eine Zufallsvariable ρ_t und nicht durch eine reelle Zahl beschrieben und es gelte

$$\rho_t := \frac{E[V_{t+1} + CF_{t+1} | \mathcal{F}_t]}{V_t} - 1.$$

Die – bei deterministischen Kapitalkosten erfolgversprechende – Herleitungstechnik läuft nun so ab, dass man die Variable V_{t+1} eliminiert, indem man vorstehende Gleichung zeitversetzt in sich selbst einsetzt und diesen Prozess immer weiter fortsetzt. Das ergibt im ersten Schritt

$$V_t = \frac{E\left[\frac{E[V_{t+2} + CF_{t+2} | \mathcal{F}_{t+1}]}{1+\rho_t} + CF_{t+1} | \mathcal{F}_t\right]}{1+\rho_t},$$

womit die erwähnte Schwierigkeit bereits offenkundig wird. Nur dann, wenn ρ_t keine Zufallsvariable ist, kann man sie aus dem Erwartungswert herausziehen und die Gleichung entsprechend vereinfachen.

Als Zwischenfazit müssen wir festhalten, dass uns vorerst Mittel und Ideen fehlen, um auf die Annahme deterministischer Kapitalkosten zu verzichten. Wir müssen also nach anderen Wegen suchen, um unsere Bewertungsgleichung zu gewinnen, wenn Kapitalkosten stochastisch sein sollen.

2.2 *Kurs-Dividenden-Verhältnis statt Kapitalkosten*

Eine elementare Umstellung von Gleichung (3) lässt erkennen, dass die Größe κ_t^{-1} nichts anderes ist als ein Kurs-Dividenden-Verhältnis. Vergegenwärtigt man sich den klassischen Gordon-Shapiro-Fall (2), so ist erkennbar, dass die Variable k dort gleich zwei Bedeutungen besitzt. k beschreibt zum einen die (bedingte) erwartete Rendite und damit also die Kapitalkosten. Zum anderen darf man feststellen, dass sich der Kehrwert k^{-1} als Kurs-Dividenden-Verhältnis interpretieren lässt.

Unter Unsicherheit gibt es allerdings keine Gewähr dafür, dass die unmittelbare Identität von Kapitalkosten und Kurs-Dividenden-Verhältnis nach wie vor besteht. Daher empfiehlt es sich, über die Frage nachzudenken, welche Vorgehensweise angebracht ist. Sollte man, um die Theorie zu entwickeln, zweckmäßige Voraussetzungen in Bezug auf stochastische Kapitalkosten formulieren? Oder ist es besser, sich mit entsprechenden Anforderungen an das Kurs-Dividenden-Verhältnis auseinanderzusetzen? Die Überlegungen im vorigen Abschnitt haben uns dazu veranlasst, den zweiten Weg zu gehen, und das hat sich als fruchtbar erwiesen.

Die erste wichtige Überlegung besteht also darin, sich nicht auf die Kapitalkosten, sondern auf das Kurs-Dividenden-Verhältnis zu konzentrieren. Deshalb wird sich unser Beweisweg stark von der Technik unterscheiden, die man sonst anwendet. Die zweite Überlegung betrifft diese Beweistechnik selbst. Dazu muss man sich klarmachen, was eigentlich bewiesen werden muss, damit man von einer validen ökonomischen Theorie für eine stochastische Version der Gordon-Shapiro-Formel sprechen kann. Hier sind zwei Dinge wichtig, die wir im nächsten Abschnitt beschreiben.

2.3 Eindeutige Aktienwerte und Transversalität

Jede Bewertungsgleichung (und demzufolge auch die Gordon-Shapiro-Beziehung) erfordert zwei Bedingungen. Wir beginnen mit der Arbitragefreiheit.

Arbitragefreiheit: Eine Bewertungsgleichung muss immer sicherstellen, dass der modellierte Markt keine Arbitragegelegenheiten ermöglicht. Andernfalls verliert der Begriff des Wertes seinen Sinn, da sich jede Investorin so viel Geld „drucken" könnte wie sie will.

Eine solche Annahme zu treffen, ist in der Finanzierungstheorie üblich. Formal unterstellt sie damit nur eine einzige Investorin, die darüber nachdenkt, ob mögliche Werte von Aktien in sich konsistent sind. Was andere Marktteilnehmer denken, spielt dabei zunächst keine Rolle. Andererseits muss klar sein, dass ein Markt immer mehrere Teilnehmer voraussetzt, damit überhaupt getauscht werden kann. An dieser Stelle befindet sich die Finanzierungstheorie in einem nicht wirklich auflösbaren Dilemma. Man behilft sich in diesem Zusammenhang immer mit der Fiktion, dass in einem ersten Schritt ein Investor nur analysiert und der Gesamtmarkt erst in einem weiteren Schritt in den Blick genommen wird.

Eindeutigkeit: Die Werte, die ein Investor ermittelt, müssen eindeutig sein. Ein Unternehmensbewertungsmodell, das auf beliebige Werte führt, erklärt am Ende keinen einzigen. Die Marktteilnehmer müssen sich auf einen einheitlichen Wert einigen können.

In der Literatur haben sich Verfahren durchgesetzt, die die Einhaltung dieser beiden Bedingungen sicherstellen. Die Arbitragefreiheit der Märkte ist garantiert, wenn ein risikoneutrales Wahrscheinlichkeitsmaß Q existiert.[9] Darunter versteht man, dass die bedingte Rendite unter diesem Maß dem risikolosen Zinssatz entsprechen muss, oder dass Dividende und Aktienwert der Relation

$$V_t = \frac{E^Q[V_{t+1} + CF_{t+1}|\mathcal{F}_t]}{1 + r_f} \tag{7}$$

genügen. Wir setzen die Existenz einer entsprechenden Wahrscheinlichkeit Q voraus, womit der ersten Bedingung bereits Genüge getan ist.

Schwieriger wird es mit der Eindeutigkeitsforderung. Man gewinnt eindeutige Werte zuerst einmal nur, wenn man sicher sein kann, dass das zu bewertende Unternehmen an einem bestimmten zukünftigen Zeitpunkt T seine Aktivitäten dauerhaft einstellt, keine Cashflows mehr abwirft und infolgedessen im Zeitpunkt T keinen Wert mehr hat. Im Allgemeinen kann man aber keinen Punkt in endlicher Zeit benennen, an dem das Unternehmen ganz sicher seine Tätigkeit beenden wird. Deswegen unter-

9 Diese Idee findet sich das erste Mal ausführlich in *Harrison* und *Kreps* (1979). Sie ist im Abschnitt 2.3.1 in *Kruschwitz* und *Löffler* (2020) ausführlicher beschrieben.

stellt man regelmäßig, dass das zu bewertende Unternehmen auf Dauer eingerichtet wurde. Dann muss aber eine Grenzbetrachtung $T \to \infty$ vorgenommen werden. In welche Widersprüche man sich dabei verwickeln kann, zeigt die Diskussion um den Fall eines Unternehmens, das seine rentablen Investitionen beständig ausweiten kann und deshalb keine Dividenden ausschüttet: Nach der Bewertungsgleichung (4) müsste es absolut nichts wert sein.[10]

Kern des Problems ist die sog. Transversalitätsbedingung. Darunter versteht man die Forderung, dass der Restwert eines Unternehmens mit fortschreitender Lebensdauer gegen null geht. Die Bedeutung dieser Bedingung macht man sich am besten klar, indem man die Bewertungsgleichung in Form eines Zwei-Phasen-Modells notiert,

$$V_0 = \sum_{t=1}^{T} \frac{E\left[CF_t\right]}{(1+k)^t} + \frac{E\left[V_T\right]}{(1+k)^T}. \qquad (8)$$

Man betrachte den Unterschied zur Bewertungsgleichung (4). Dort tritt ein Grenzübergang $T \to \infty$ hinzu, und es ist keinesfalls klar, dass der zweite Summand bei diesem Grenzübergang verschwindet. Nur dann, wenn das der Fall ist, gilt die Bewertungsgleichung (4). Genau das ist die Forderung der Transversalitätsbedingung.

Ein Blick in die Literatur zeigt, warum die Transversalitätsbedingung so wichtig ist. Sie ist im Rahmen von sog. bubble solutions untersucht worden.[11] Bei solchen bubble solutions wird im Rahmen der Untenehmensbewertung auf die Einhaltung der Transversalitätsbedingung verzichtet; die Unternehmenswerte sind dann nicht mehr eindeutig. Vielmehr gibt es unendlich viele Aktienwerte, die die Iterationsbedingung (7) erfüllen. Die Investorin darf sich sozusagen aussuchen, welchen Wert sie akzeptabel findet. Eine solche „Lösung" ist inakzeptabel. Das unterstreicht, wie wichtig es ist, dass der Aktienwert eine Transversalitätsbedingung erfüllt.

Wir wollen den Abschnitt mit einer technischen Anmerkung beenden. Die Transversalitätsbedingung ist für unsere Überlegungen notwendig. Allerdings wenden wir sie in unserer Originalarbeit nicht direkt an. Vielmehr ist es uns gelungen, sie auf ein anderes Kriterium zurückzuführen, das aus der Theorie konvergenter Reihe, einem Teilgebiet der Analysis, bekannt ist, das so genannte Cauchy-Kriterium. In unserer Originalarbeit konnten wir zeigen, dass das Cauchy-Kriterium die Transversalität sicherstellt. Abbildung 2 soll dies graphisch veranschaulichen. Erst mit dem Wechsel von der ursprünglichen Transversalitätsbedingung zum Cauchy-Kriterium gelang die Formalisierung unseres Konzepts. Da die damit zusammenhängenden Rechnungen für die Unternehmensbewertung eher von untergeordnetem Interesse sind, verzichten wir auf eine ausführliche Darstellung.

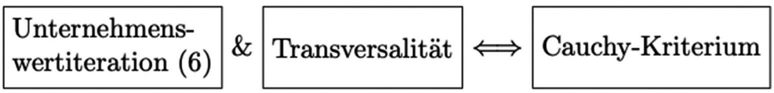

Abbildung 2: Das Cauchy-Kriterium sichert aussagenlogisch sowohl die Unternehmenswertiteration als auch die Transversalität.

10 Zu diesem Thema gab es in der deutschen Literatur eine intensive Debatte, siehe *Kruschwitz* und *Löffler* (1998), *Matschke* und *Hering* (1999) und *Siegel* (2002), *Blaufus* (2002), *Casey* (2004) sowie *Kruschwitz* und *Löffler* (2015).

11 Die Literatur beginnt mit *Froot* und *Obstfeld* (1991). Die Idee scheint aber heute keine Unterstützer mehr zu haben.

Um nun Eindeutigkeit und Transversalität (bzw das Cauchy-Kriterium) zu beweisen, benötigt man Annahmen über die Cashflows und das Kurs-Dividenden-Verhältnis. Welche Annahmen sollen das sein? Darauf gehen wir im nächsten Abschnitt ein.

2.4 Drei Annahmen des Modells

Man braucht in Bezug auf κ_t drei wichtige Annahmen, um die Eindeutigkeit des Wertes sicherzustellen. Erst danach werden wir uns dem Nutzen zuwenden, der sich aus den Annahmen ziehen lässt.

1. Das Kurs-Dividenden-Verhältnis κ_t^{-1} ist positiv und unabhängig von den Dividenden CF_t.

   Dahinter verbirgt sich die Idee, dass es neben den Dividenden noch einen weiteren Zufallsprozess gibt, der Einfluss auf die Aktienwertentwicklung hat.

2. Die Inverse des Kurs-Dividenden-Verhältnisses bildet einen Q-autoregressiven Prozess,

$$E^Q[\kappa_{t+1}^{-1}|\mathcal{F}_t] = a\kappa_t^{-1}, \tag{9}$$

für eine Zahl a, die die Bedingung $0 < a \leq 1$ erfüllt. Diese Annahme tritt an die Stelle der Konstanz der Kapitalkosten im Gordon-Shapiro-Fall, dennoch ist sie nicht so leicht zu verstehen, zumal sich die Voraussetzung auf das risikoneutrale Maß Q und nicht auf die subjektive Wahrscheinlichkeit P bezieht. Q ist im Allgemeinen nicht bekannt. Wir werden im nächsten Abschnitt diskutieren, wie man sie dennoch empirisch veranschaulichen kann.

Neben den beiden eben genannten Voraussetzungen gibt es noch eine weitere Annahme, die für unsichere Kurs-Dividenden-Verhältnisse wichtig ist. Die Ideen, welche unserer Ansicht nach zur Lösung führen, finden sich zum ersten Mal in Arbeiten des tschechischen Mathematikers *Jiří Anděl* (siehe *Anděl* (1976)). *Anděl* nimmt an, dass der Koeffizent des autoregressiven Prozesses selbst stochastisch ist. Dies ist unsere dritte Annahme.

3. Wir nehmen an, dass die Cashflows einem autoregressiven Prozess mit stochastischem Parameter folgen,[12]

$$E^Q[CF_{t+1}|\mathcal{F}_t] = \frac{e^{r_f}}{a+\kappa_t} CF_t, \tag{10}$$

   wobei es sich um dieselbe Zahl a wie in Gleichung (9) handelt.

Wir haben in unserer Originalarbeit ausführlich begründet, weshalb eine solche Annahme sinnvoll ist und weshalb sie sich aus bisherigen Erkenntnissen ergibt. Die damit zusammenhängenden Überlegungen sind leider etwas formal. Daher wollen wir nur andeuten, was uns zu dieser Annahme bewegt hat und weshalb sie durchaus als Erweiterung bestehender Voraussetzungen gesehen werden kann.

Das Gordon-Shapiro-Modell unterstellt in Gleichung (1) eine Martingaleigenschaft für die Cashflows. Diese Martingalannahme unterscheidet sich von Gleichung (10) in zwei Punkten:

12 e ist die Eulersche Zahl. Diese Schreibweise ist bei zeitstetigen Zinsen üblich.

1. In der ursprünglichen Martingalannahme (1) finden wir die subjektive Wahrscheinlichkeit P, in der Gleichung (10) erkennen wir die risikoneutrale Wahrscheinlichkeit Q.
2. In der ursprünglichen Martingalannahme (1) ist der Koeffizient vor dem letzten Cashflow eine Zahl, in (10) finden wir dort die Zufallsvariable $\frac{e^{r_f}}{a+\kappa_t}$.

Zweifellos ist die Anwendung eines stochastischen Koeffizienten in einem autoregressiven Prozess eine wichtige Innovation. Warum aber wird auch das Maß gewechselt, das in der Annahme angewandt wird? Wird hier vielleicht durch einen technischen Trick versucht, eine ökonomisch unsinnige oder schwer nachvollziehbare Voraussetzung zu verbergen?

In unserer Arbeit zeigen wir, dass dies nicht der Fall ist. Da die entsprechenden Rechnungen aufwendig sind, verzichten wir hier auf eine ausführliche Beschreibung. Wir können aber zeigen, dass im klassischen Gordon-Shapiro-Fall nicht nur eine Martingaleigenschaft der Form (1) gilt, sondern dass man auch unter dem risikoneutralen Maß Q eine Beziehung beweisen kann, die der Bedingung (1) sehr ähnlich ist. Der Wechsel von P nach Q ist also kein technischer Trick, sondern hätte bereits bei Gordon-Shapiro unternommen werden können. Wir können nur vermuten, warum bisher niemand diesen Zusammenhang bemerkt hat; wahrscheinlich war diese Erkenntnis für diejenigen, die sie vor uns hatten, nicht von so großer Bedeutung, dass sie eine Veröffentlichung für nötig oder zweckmäßig hielten.

Nun werden wir die wichtigsten Folgerungen diskutieren, die aus unseren Annahmen resultieren.

3 Ergebnis

Im Folgenden wird zuerst die Voraussetzung (10) untersucht werden, wonach das Kurs-Dividenden-Verhältnis einem autoregressiven Prozess unter dem risikoneutralen Maß Q folgt. Zu diesem Zweck greifen wir auf den Satz von Girsanov zurück, mit dem man die Relation (10) von der Wahrscheinlichkeit Q in die Wahrscheinlichkeit P überführen kann: Man erhält eine Darstellung, die in der Zeitreihenökonomie wohlbekannt ist, und zwar gibt es einen Zufallsprozess A_{t-1} dergestalt, dass die Relation

$$E[\kappa_{t+1}^{-1}|\mathcal{F}_t] = a\,\kappa_t^{-1} + A_{t-1} \tag{11}$$

gilt.[13] Wie immer in der ökonomische Theorie erweist sich die Autoregressionsannahme (11) dann als zweckmäßig, wenn weitere nützliche Voraussetzungen hinzutreten.

Sobald Gleichungen der Form (11) untersucht werden, muss man sich ökonometrischer Modelle bedienen. Wenn keinerlei Erkenntnisse über die Art der zeitlichen Abhängigkeit des Parameters A_t von der Zeit t bekannt sind, kann man keine sinnvolle empirische Untersuchung vornehmen. Vielmehr ist es so, dass rückwirkend jede vorliegende Datenbasis durch eine entsprechende Anpassung des Prozesses A_t „erklärt" werden kann. Daher nehmen wir aus Gründen der Vereinfachung und um überhaupt erste empirische Ergebnisse zu erhalten an, dass der Zufallsprozess A_t in Wirklichkeit aus

13 Siehe *Föllmer* und *Schied* (2011, Theorem 10.25).

einer Konstanten $A_t = A$ besteht. Dann besagt aber die Gleichung (11) nichts anderes, als dass das Kurs-Dividenden-Verhältnis einem autoregressiven Prozess mit dem Faktor a folgt. Solch eine Annahme kann empirisch überprüft werden.

Allerdings müssen wir zwei Fälle unterscheiden, die verschiedener nicht sein können. Es ist von ganz wesentlicher Bedeutung, ob der Parameter a in (11) identisch 1 ist oder ob $a < 1$ gilt.

$\alpha = 1$: In diesem Fall weist der stochastische Prozess κ_t^{-1} eine Einheitswurzel auf. Falls nun nicht gerade $A = 0$ gilt, hat dies Konsequenzen für das Kurs-Dividenden-Verhältnis. Es liegt ein random walk vor, und man kann mit wenig Aufwand beweisen, dass der Erwartungswert des Kurs-Dividenden-Verhältnisses gegen (plus oder minus) unendlich geht. Mit anderen Worten: Man muss davon ausgehen, dass die beobachteten Kurs-Dividenden-Verhältnisse mit der Zeit über alle Grenzen wachsen. Es liegt so etwas wie ein „exuberance" (Überschwang) vor.

$\alpha < 1$: Ganz anders liegt der Fall jetzt. Nun haben wir es mit einem stationären Prozess zu tun, von dem bekannt ist, dass der Erwartungswert konvergiert. Dieser Grenzwert lässt sich leicht berechnen, da

$$\lim_{t\to\infty} E\left[\kappa_{t+1}^{-1}\right] = a \lim_{t\to\infty} E\left[\kappa_t^{-1}\right] + A \quad \Rightarrow \quad \lim_{t\to\infty} E\left[\kappa_t^{-1}\right] = \frac{A}{1-a}$$

gelten muss.

Abbildung 3 veranschaulicht den Unterschied zwischen beiden Fällen anhand simulierter Daten. Links erkennt man den nichtstationären Fall, rechts ist dagegen ein stationärer Prozess abgebildet. Im nichtstationären Fall geht das Kurs-Dividenden-Verhältnis über jede Grenze, während es im stationären Fall einem endlichen Grenzwert zustrebt.

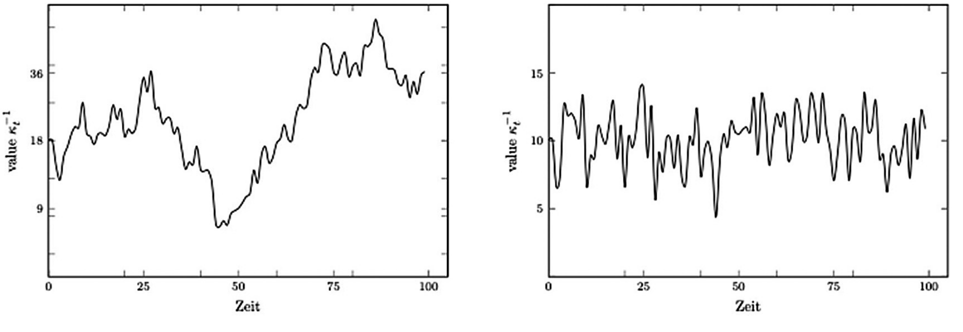

Abbildung 3: Zwei Realisationen eines autoregressiven Prozesses in Abhängigkeit vom Parameter a (links Einheitswurzel a = 1, rechts stationärer Prozess a < 1)

Da man Kurs-Dividenden-Verhältnisse über 200 kaum je beobachtet[14] und sich der Preis der meisten Aktien typischerweise sogar zwischen 0 und 50 bewegt, spricht vieles dafür, dass der Parameter a kleiner als eins sein sollte. Ob sich diese Vermutung bestätigen lässt, kann man nur empirisch prüfen. Zu diesem Zweck haben wir uns eines Datensatzes bedient, der in der Motivation unserer Originalarbeit eine wichtige Rolle spielt.

14 Siehe beispielsweise *Grbenic* (2021), der eine Übersicht über Transaktionsmultiplikatoren nicht börsennotierter Unternehmen zusammenträgt.

Immer wieder ist beobachtet worden, dass Aktienpreise stärker als Dividenden schwanken. Eine solche Feststellung betrifft ohne jeden Zweifel immer die Vergangenheit und sagt erst einmal gar nichts über einen in der Zukunft gültigen Zusammenhang – wenngleich sich aus der Aussage eine Art Gesetzmäßigkeit zu ergeben scheint, die auch in den kommenden Jahren Bestand haben könnte. *Shiller* (1981) hat in einer häufig zitierten Arbeit diese historische Beobachtungen auf Vorhersagen ausgedehnt und sich dabei des Gordon-Shapiro-Modells bedient. *Shiller* kam zu dem Resultat, dass Aktienpreise deutlich stärker schwanken als Dividenden, was auch der Titel seines Aufsatzes unmissverständlich zum Ausdruck bringt: *Shiller* sprach von „excess volatility“. Seine Ergebnisse sind von ihm selbst und vielen anderen Autoren mehrfach überprüft und bestätigt worden.[15] Heutzutage gibt es wohl niemanden, der an der Richtigkeit von *Shillers* Beobachtungen Zweifel hegt.

Wir haben in unserer Arbeit nachweisen können, dass sich die Überlegungen *Shillers* sehr gut mit unserem Modell vereinbaren lassen. Das ist deswegen nicht weiter verwunderlich, weil es (im Gegensatz zum klassischen Gordon-Shapiro-Modell) nicht eine, sondern zwei unabhängige Quellen der Unsicherheit gibt. Die excess volatility beruht in einem Modell also auf der Stochastik der Kapitalkosten.

Wir haben aus diesem Grunde *Shillers* Datensatz verwendet, um unsere Hypothese zu testen.[16] Dabei verwendeten wir die von *Shiller* hergeleitete „Cyclically Adjusted Price Earnings Ratio P/E10“, die den Zeitraum von 1881–2021 umfasst. Um zu verifizieren, ob ein stationärer autoregressiver Prozess vorliegt, wurde zuerst ein Einheitswurzeltest (augmented Dickey-Fuller Test) durchgeführt. Die Nullhypothese lautete H_0: $a = 1$ und besagt, dass ein random walk vorliegt; in diesem Fall wäre eine Prognose des zukünftigen Kurs-Dividenden-Verhältnisses mit Hilfe unseres Ansatzes nicht möglich. Das Ergebnis ist eindeutig, siehe Tabelle 1. H_0 kann auf keinem sinnvollen Signifikanzniveau verworfen werden. Wir müssen vielmehr davon ausgehen, dass eine Einheitswurzel vorliegt und damit die Price Earnings Ratio einem random walk folgt.[17]

	Z-Statistik	1 %-Wert	5 %-Wert	10 %-Wert
Dickey-Fuller	-1.053	-3.430	-2.860	-2.570
ADF-GLS Test	-2.094	-3.480	-2.849	-2.561
Phillips-Perron	-8.931	-20.700	-14.100	-11.300

Tabelle 1: Einheitswurzeltest von Shillers Daten

Robustheitstests bestätigen die Beobachtung. Wir kommen nicht zu anderen Resultaten, wenn wir uns auf die letzten fünf Jahre von 2017–2021 beschränken. Damit ist klar, dass unsere Theorie nicht auf die Daten von Shiller angewandt werden kann. Die Gründe dafür können vielfältig sein. Shiller ermittelt seine Monatsdaten aus linearer Approximation, er verwendet Gewinne statt Dividenden, und er betrachtet nicht einzelne Aktien, sondern einen Index.

Wir haben daher einen zweiten Versuch unternommen und mit Hilfe der Datenbank Eikon eine Einzelaktie untersucht. Wir entschieden uns für die BMW-Stammaktie und ermittelten sowohl die Einzeldividenden, den Tag der Auszahlung und den Schlusskurs an diesem Tag. Daraus konnten wir eine 20 Datenpunkte umfassende Folge

15 Die beste Übersicht liefert vermutlich Shillers Nobelpreisrede selbst, siehe https://www.nobelprize.org/uploads/2018/06/shiller-lecture.pdf.

16 Siehe http://www.econ.yale.edu/~shiller/data.htm.

17 *Cochrane* (1992) dagegen kommt auf einen Faktor a = 0.9, nutzt aber andere Daten.

von Kurs-Dividenden-Verhältnissen erzeugen. Diese Folge wurde einem augmented Dickey-Fuller Einheitswurzeltest unterzogen, bei dem die Nullhypothese $a = 1$ auf dem 1 %-Niveau zu verwerfen war. Daher haben wir die Parameter des autoregressiven Prozesses mit Maximum Likelihood geschätzt. Wir erhielten (Standardabweichungen in Klammern)

$$y_{t+1} = A^{\text{BMW}} + a^{\text{BMW}}\, y_t + \varepsilon_{t+1}$$

$$A^{\text{BMW}} = 24{,}7050 \quad (13{,}3846)$$

$$a^{\text{BMW}} = 0{,}5016 \quad (0{,}17423)$$

$$\text{Log likelihood} = -91.64568$$

Beide Werte sind auf dem 1 %-Niveau signifikant, die Varianz der Störterme beläuft sich auf 23,47. Wir sahen weiter, dass der langfristig fundamentale Wert der price-dividend-ratio $\frac{A}{1-a}$ etwa bei 49,57 liegt. Gleichzeitig erlaubt unser Ansatz, eine Schätzung für das Kurs-Dividenden-Verhältnis des nächsten Jahres abzugeben. Aufgrund des autoregressiven Prozesses kann man von einem Wert in der Größenordnung

$$y_{2022} = A^{\text{BMW}} + a^{\text{BMW}} \cdot y_{2021} = 46{,}31$$

ausgehen.

So überzeugend dieses Beispiel sein mag, bleiben dennoch zahlreiche Fragen offen und weitere Analysen müssen folgen. So ist nicht klar, ob andere Aktien (beispielsweise aus dem DAX 40) ebenfalls so positive Ergebnisse liefern. Es muss geprüft werden, ob andere Kurse als die Schlusskurse ebenfalls zu signifikanten Resultaten führen, und es muss untersucht werden, welchen Einfluss die Verwendung des Kurses am Tag der Auszahlung und nicht der Ankündigung auf das Ergebnis hat. Hier tut sich ein größeres Forschungsprogramm auf. Ein erster Schritt wurde im Rahmen einer Masterarbeit unternommen.[18] In dieser Arbeit wurden alle Unternehmen des S&P 500, die verfügbare Daten seit 1990 aufwiesen, in die Untersuchung aufgenommen (dies ergab 344 von insgesamt 355 möglichen Folgen von Unternehmensdaten). Es wurde geprüft, ob das jeweilige Kurs-Dividenden-Verhältnis bzw. auch das Kurs-Earnings-Verhältnis einem AR-Prozess unterliegt. In einem ersten Schritt zeigte sich dabei, dass bei mehr als ¾ aller Unternehmen ein solcher AR-Prozess nicht ohne Weiteres abgelehnt werden kann. Daher scheint der Weg, den wir vorschlagen, durchaus fruchtbringend zu sein.

4 Fazit

Folgt man der von uns für zweckmäßig gehaltenen Kapitalkostendefinition gemäß Gleichung (5), so gewinnt man daraus Bewertungsgleichungen der traditionellen Form nur durch Rückgriff auf die heroische Annahme, dass die Kapitalkosten deterministisch sind. Eine solche Vorgehensweise ist ohne jeden Zweifel problematisch. Wir sehen einen nennenswerten methodischen Fortschritt unserer Arbeit in der Tatsache, dass wir einen Weg gefunden haben, auf die fragwürdige heroische Annahme zu verzichten, was Bewertungen unter Verwendung stochastischer Kapitalkosten ermöglicht.

18 *Felix Sachs*, Empirical Properties for Stochastic Cost of Capital, Masterarbeit Freie Universität Berlin (4.3.2022).

Formal hat die von uns entwickelte (aus einem DCF-Verfahren gewonnene) neue Bewertungsgleichung mit stochastischen Kapitalkosten unübersehbare Ähnlichkeit mit einem Multiplikator-Verfahren mit dem Kurs-Dividenden-Verhältnis als Multiple. Es wäre unredlich, die Schwächen dieses Konzepts zu verschweigen. Das Modell macht brauchbare Aussagen darüber, wie sich Unternehmen bewerten lassen, die Ausschüttungen an ihre Eigentümer vornehmen. Wie vorzugehen ist, wenn davon ausgegangen werden muss, dass derartige Zahlungen auf absehbare Zeit nicht zu erwarten sind,[19] bleibt absolut offen.

Möglicherweise lohnt es sich, anstelle des Kurs-Dividenden-Verhältnisses mit der Price-Earnings-Ratio (PER) zu arbeiten, weil es sich um „nahe Verwandte" handelt. Solche Price-Earnings-Ratios sind in der Praxis als Multiplikatoren äußerst beliebt. Die heute verfügbaren Daten erlauben es, mit überschaubarem Aufwand PER für Unternehmen sowie ganze Unternehmensgruppen (Industrien) zu ermitteln. Sollte sich herausstellen, dass zum einen die PER für ein Unternehmen ein regelhaftes Auftreten aufweist (siehe hierzu Gleichung (13)), und sollte sich zudem zeigen, dass Unternehmen einer Industrie vergleichbare Charakteristika ihrer PER besitzen, so ließe sich rechtfertigen, eine PER mit diesen Eigenschaften als Multiplikator bei der Unternehmensbewertung zu verwenden.

Gerade vor dem Hintergrund, dass sich Unternehmensbewerter im Tagesgeschäft sehr viel lieber auf Multiplikatoren als beispielsweise auf DCF-Verfahren verlassen,[20] wäre es zu begrüßen, wenn die Wissenschaft theoretisch begründbare Modelle für Multiples formulieren könnte. Die von uns entwickelte Idee, mit stochastischen Kapitalkosten zu arbeiten, bietet dafür zumindest die theoretischen Elemente. Auf der Basis des hier vorgestellten Konzepts ließe sich ins Feld führen, dass diese Bewertungstechnik explizit auf dem DCF-Kalkül beruht und sie gleichzeitig für die praktische Anwendung stark vereinfacht.

Man kann weitere Vorteile nennen, die für eine Bewertungstechnik mit Hilfe von Multiples sprechen. Wer Unternehmen mit DCF-Konzepten auf der Grundlage deterministischer Kapitalkosten bewerten will, muss diese praktisch bestimmen und greift zu diesem Zweck in aller Regel auf das CAPM zurück.[21] Dieses Gleichgewichtsmodell beruht auf nicht allzu realistischen Annahmen[22] und gilt seit langem als empirisch widerlegt. Die Bewertungsgleichung (7) kommt dagegen weitgehend ohne solch problematischen Voraussetzungen aus. Bisher erzielte empirische Beobachtungen stützen die von uns getroffenen Annahmen und weisen nicht wie im CAPM auf grobe Fehlbewertungen hin.[23]

19 Man denke an Start-ups.

20 *Homburg, Lorenz* und *Sievers* (2011) gaben an, dass in einer Befragung der 400 größten deutschen börsennotierten Unternehmen aus dem CDAX die Multiplikatoren mit 64 % den dritten Rang einnahmen. Hierzu schreiben die Autoren: „Auch wenn die Multiplikatorverfahren als juristische Grundlage nicht ausreichend anerkannt sind (IDW S 1), bieten sie doch die Möglichkeit der Plausibilitätsprüfung der mit intrinsischen Verfahren berechneten Unternehmenswerte". Außerhalb der großen börsennotierten Unternehmen dürfte das Bild stärker zu Multiplikatoren tendieren, da hier die Verpflichtung, nur von Wirtschaftsprüfern anerkannte Verfahren zu verwenden, schwächer ausgeprägt ist.

21 Diese Vorgehensweise ist durchaus nicht zwingend erforderlich. Man könnte als Schätzer der erwarteten Rendite auch schlicht den Mittelwert historischer Renditen benutzen.

22 Zwei Annahmen, die im Rahmen von Unternehmensbewertungen besonders viel Kritik herausfordern, sind folgende: (1) Das Standard-CAPM ist ein einperiodiges Modell, während Unternehmen fast immer eine Lebensdauer von vielen Perioden aufweisen. (2) Das Standard-CAPM unterstellt, dass alle Marktteilnehmer sich bei ihren Anlageentscheidungen an Erwartungswerten und Streuungen von Renditen orientieren, also sog. μ-σ-Präferenzen besitzen.

23 Siehe hierzu beispielsweise *Fama* und *French* (1996) mit einem sehr aussagekräftigen Titel ihrer Arbeit.

Literaturverzeichnis

Anděl, J. (1976), Autoregressive Series with Random Parameters. Mathematische Operationsforschung und Statistik, 7. Jg., Nr. 5, S. 735–741, doi: 10.1080/02331887608801334.

Armitage, S. (2005), The Cost of Capital, Cambridge.

Ballwieser, W. (2021), Unternehmensbewertung: Prozess, Methoden und Probleme, 6. Aufl., Stuttgart.

Blaufus, K. (2002), Unternehmensbewertung und Probleme mit der Unendlichkeit? Anmerkungen zu den Beiträgen von *Kruschwitz/Löffler*, *Matschke/Hering* und *Siegel*. Der Betrieb, 55. Jg., S. 1517–1519.

Bodie, Z./Kane, A./Marcus, A. J. (2013), Investments, 10. Aufl., Boston.

Campbell, J. Y./Shiller, R. J. (1988), The Dividend-Price Ratio and Expectations of Future Dividends and Discount Factors, The Review of Financial Studies, 1. Jg., No. 3, S. 195–228.

Casey, C. (2004), Das Kruschwitz/Löffler-Paradoxon: Ein Paradoxon?, Vortrag beim Workshop Unternehmensbewertung an der Universität Hannover, Lehrstuhl für Banken und Finanzierung.

Cochrane, J. H. (2011), Presidential Address: Discount Rates, The Journal of Finance, 66. Jg., S. 1047–1108.

Fama, E. F./French, K. R. (1996), The CAPM Is Wanted, Dead or Alive, The Journal of Finance, 51. Jg., S. 1947–1958.

Föllmer, H./Schied, A. (2011), Stochastic Finance: An Introduction in Discrete Time, 3. Aufl., Berlin und New York.

Froot, K. A./Obstfeld, M. (1991), Intrinsic Bubbles: The Case of Stock Prices, The American Economic Review, 81. Jg., S. 1189–1214.

Gordon, M. J./Shapiro, E. (1956), Capital Equipment Analysis: The Required Rate of Profit, Management Science, 3. Jg., S. 102–110.

Grbenic, S. (2021), Standard-Transaktionsmultiplikatoren, Bewertungs-Praktiker, 3. Jg., S. 97–99.

Harrison, J. M./Kreps, D. M. (1979), Martingales and Arbitrage in Multiperiod Securities Markets, Journal of Economic Theory, 20. Jg., S. 381–408.

Homburg, C./Lorenz, M./Sievers, S. (2011), Unternehmensbewertung in Deutschland: Verfahren, Finanzplanung und Kapitalkostenermittlung, Controlling & Management, 55. Jg., S. 119–130, doi: https://doi.org/10.1007/s12176-011-0096-5.

Institut der Wirtschaftsprüfer in Deutschland (2008), IDW Standard: Grundsätze zur Durchführung von Unternehmensbewertungen [IDW S 1] (Stand: 2.4.2008), Die Wirtschaftsprüfung (Supplement), 3. Jg., S. 68–89.

Kruschwitz, L./Löffler, A. (1998), Unendliche Probleme bei der Unternehmensbewertung, Der Betrieb, 51. Jg., S. 1041–1043.

Kruschwitz, L./Löffler, A. (2015),Transversality and the Stochastic Nature of Cash Flows, Modern Economy, 6. Jg., S. 755–769.

Kruschwitz, L./Löffler, A. (2020), Stochastic Discounted Cash Flow: A Theory of the Valuation of Firms, Cham (Switzerland).

Laitenberger, J. (2006), Rendite und Kapitalkosten, Zeitschrift für Betriebswirtschaft, 76. Jg., S. 79–101.

Ljungqvist, L./Sargent, T. (2018), Recursive Macroeconomic Theory, 4. Aufl., Bd. 1.

Matschke, M. J./Hering, T. (1999), Unendliche Probleme bei der Unternehmensbewertung? Erwiderung zu *Kruschwitz/Löffler*, Der Betrieb, 52. Jg., S. 920–922.

Mehra, R./Prescott, E. C. (1985), The Equity Premium: A Puzzle, Journal of Monetary Economics, 15. Jg., S. 145–161.

Meitner, M./Streitferdt, F. (2014), Was sind Kapitalkosten? Eine integrierende Analyse, Corporate Finance, 12. Jg., Nr. 5, S. 527–536.

Pratt, S. P./Grabowski, R. J. (2014), Cost of Capital: Applications and Examples, 5. Aufl.

Rapp, M.-S. (2006), Arbitrage-Free Valuation of Investment Projects Using Risk-Adjusted Discount Rates, Schmalenbachs Zeitschrift für betriebswirtschaftliche Forschung, 58. Jg., S. 771–806.

Shiller, R. J. (1981), Do Stock Prices Move too Much to Be Justified by Subsequent Changes in Dividends?, The American Economic Review, 71. Jg., S. 421–436.

Siegel, T. (2000), Paradoxa in der Unternehmensbewertung und ihre Erklärung. In: Bilanzierung und Besteuerung der Unternehmen: Das Handels- und Steuerrecht auf dem Weg ins 21. Jahrhundert, Festschrift für Herbert Brönner. Hrsg. von *Jens Poll*, Stuttgart, S. 391–411.

Williams, J. B. (1938), The Theory of Investment Value, Cambridge (MA).

Wilson, R. (1968), The Theory of Syndicates, Econometrica, 36. Jg., Nr. 1, S. 119–132.

Stochastic costs of capital

It is still assumed today that the company's cost of capital is deterministic. Without such an assumption, none of the known valuation equations can be written down.

In this review article, we want to report the main results of a working paper which (for the first time, in our view) attempts to abandon the assumption of deterministic costs of capital and to assume that the costs of capital are themselves stochastic quantities. We show what conceptual issues need to be resolved in this process in order for this theory to remain internally consistent, and what this means for the then resulting version of the Gordon-Shapiro equation. First empirical investigations are carried out, where the main results are at least not immediately refuted.

JEL-Kennziffern: G12, G31, C22