

Veranstaltung
10033025 und 101053
Übung:
Optimierungssysteme
Modelle, Software, Praxisanwendungen

Uwe Suhl | Veronika Waue

SS 2008

Optimierungssysteme - SS08

Organisatorisches

- **Veronika Waue**
 - Sprechstunde Mi.11h-12h (R214)
 - E-mail: veronika@waue.net
- **Bachelor:**
 - Modul Entscheidungsunterstützung Produktion (101054)
- **Übung**
 - Mo, 10-12h, Garystr. 21, HS 108a
- **Vorlesung**
 - Di, 10-12h,
- **4 Bonuspunkte im Fach Wirtschaftsinformatik (Wahlpflichtkatalog), Produktion oder ABWL**
- **Bewertung:**
 - Abschlussklausur
 - freiwillige Hausarbeit Punkte der Hausarbeit werden zu den Punkten der Abschlussklausur gezählt.

Optimierungssysteme - SS08

Überblick

- Einführung zur mathematischen Optimierung
- Beispielübungen
- Einführung in AMPL
- Aufstellen von linearen und gemischt-ganzzahligen Modellen
- Anwendung der Modellierungstechniken
- Arbeiten mit MOPS Studio und AMPL
- Freiwillige Hausarbeit für 10 Punkte

Optimierungssysteme - SS08

Optimierung

Planungsverfahren, mit denen eine bestimmte Anzahl von *Variablen* simultan betrachtet und innerhalb gegebener *Grenzen* die bestmögliche Lösung für ein bestimmtes *Ziel* gefunden wird.

- **LP:** Ein lineares Optimierungsproblem zeichnet sich dadurch aus, dass es:
 - eine lineare Zielfunktion hat
 - die Grenzen des zulässigen Bereichs, aus dem die Variablen stammen dürfen durch lineare Nebenbedingungen beschrieben werden.
- **IP:** Ein gemischt-ganzzahliges Optimierungsproblem zeichnet sich dadurch aus, dass es:
 - eine lineare Zielfunktion und lineare Nebenbedingungen hat
 - einige der Variablen nur ganzzahlige Werte annehmen dürfen

Optimierungssysteme - SS08

Bestandteile eines Modells

- 1. Entscheidungsvariablen:**
 - EV sind die Variablen, die vom Entscheidenden beeinflusst werden können
 - EV können einen beliebigen Namen haben
 - EV sind von einem best. Typ (integer, real, binär)
 - durch die Optimierung eines Modells wird für jede EV ein Wert bestimmt, so dass sie insgesamt zur bestmögliche Lösung führen
- 2. Restriktionen/ Nebenbedingungen:**
 - Bedingungen/Einschränkungen werden in Restriktionen ausgedrückt
 - Durch die Nebenbedingungen wird der Raum für zulässige Lösungen beschrieben
 - Es gibt \leq -Restriktionen, \geq -Restriktionen und = Gleichungen (Ranges sind Restriktion die sowohl nach oben als auch nach unten beschränkt sind. Sie können auch mit \leq und \geq -Restriktionen ausgedrückt werden)
- 3. Zielfunktion:**
 - Die Zielfunktion beinhaltet alle Variablen mit ihren entsprechenden Koeffizienten, die maximiert bzw. minimiert werden sollen. (z.B. Minimierung von Kosten, Maximierung von Gewinn)
- 4. Daten / Koeffizienten**

Optimierungssysteme - SS08

Problemstellung

- Ein Reiseunternehmen möchte möglichst viele Passagiere in Minibussen transportieren. Es stehen die folgenden Minibusse zur Auswahl:

Typ	A	B
Mietpreis pro Tag	20€	40€
Sitzplätze	8	12

Es können maximal 6 Minibusse des Typs A und maximal 4 Minibusse des Typs B gemietet werden.
Dem Unternehmen steht ein Budget für das Mieten der Busse von 200€ pro Tag zur Verfügung.
Da es nur 7 Fahrer gibt, sollen insgesamt nicht mehr als 7 Minibusse gemietet werden.
Wie viele Minibusse welchen Typs sollte das Unternehmen mieten?

Optimierungssysteme - SS08

Aufstellen eines Modells

1. Definition von Entscheidungsvariablen:

- x_1 : Anzahl der Minibusse vom Typ A
- x_2 : Anzahl der Minibusse vom Typ B

2. Aufstellen der Zielfunktion:

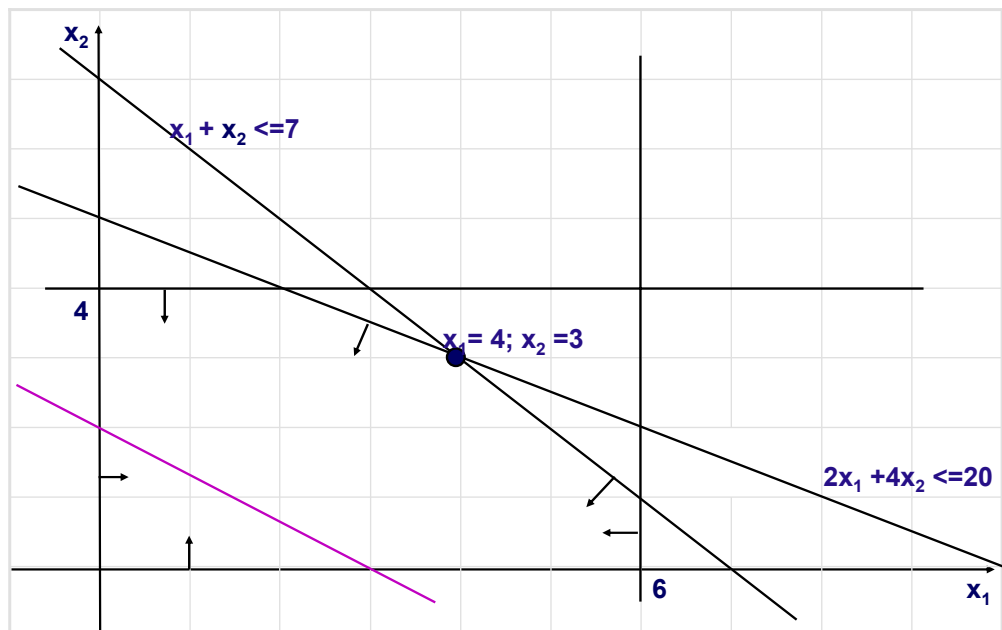
- $z = \max 8 x_1 + 12 x_2$

3. Aufstellen der Restriktionen:

- Wie werden die möglichen Werte für x und y eingeschränkt?

$x_1 \leq 6$	Es können maximal 6 Minibusse des Typs A gemietet werden
$x_2 \leq 4$	Es können maximal 4 Minibusse des Typs B gemietet werden
$20 x_1 + 40 x_2 \leq 200$	Dem Unternehmen steht ein Budget für das Mieten der Busse von 200€ pro Tag zur Verfügung.
$x_1 + x_2 \leq 7$	Da es nur 7 Fahrer gibt, sollen insgesamt nicht mehr als 7 Minibusse gemietet werden.
$x_1 \geq 0$	
$x_2 \geq 0$	

Optimierungssysteme - SS08



Optimierungssysteme - SS08

ClipMops

- Excel Add Inn
- Extras-> Add Ins... -> Durchsuchen... Im Verzeichnis von ClipMops 'clipMOPS.xla' auswählen.
- Alternative 2: Excel starten und ClipMops starten
- Download unter: <http://www.wiwiss.fu-berlin.de/institute/pwo/suhl/downloads/mops/demo.html>



Optimierungssysteme - SS08

The screenshot illustrates the workflow for creating a new model in ClipMops. It shows the 'New Model...' option in the MOPS menu, the 'ClipMops create new model' dialog box with fields for model name, column count, row count, and objective function, and the resulting spreadsheet model.

	A	B	C	D	E	F	G
1							
2		NewModel	Col1	Col2	Col3	TYP	RHS
3		Min					
4		LB					
5		UB	INF	INF	INF		
6		TYP	CON	CON	CON		
7		Row1				<=	100
8		Row2				<=	100
9							

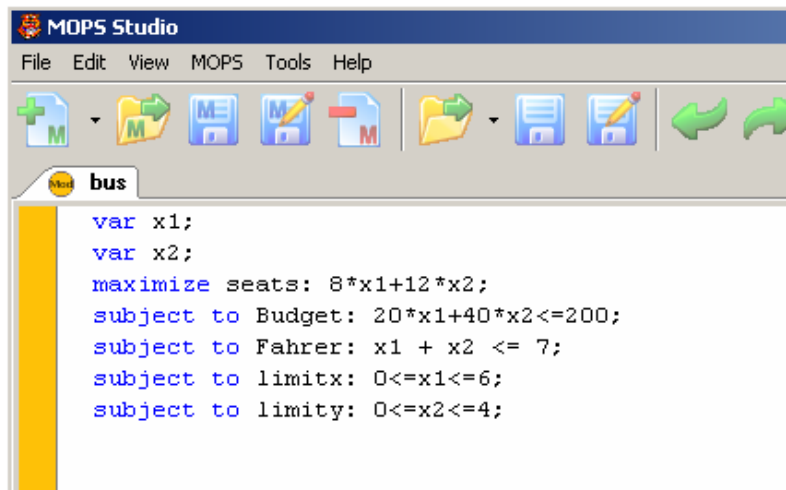
Optimierungssysteme - SS08

Bus – Beispiel mit ClipMops

Bus	Typ A	Typ B	TYP	RHS
MAX	8	12		
LB				
UB	6	4		
TYP	CON	CON		
Budget	20	40	<=	200
Fahrer	1	1	<=	7
Activity	4,00	3,00		68,00

Optimierungssysteme - SS08

Bus – Beispiel mit AMPL



The screenshot shows the MOPS Studio application window. The title bar reads "MOPS Studio". The menu bar includes "File", "Edit", "View", "MOPS", "Tools", and "Help". The toolbar contains icons for file operations (new, open, save, print, delete) and navigation (undo, redo). The main window title is "bus". The code editor contains the following AMPL code:

```
var x1;  
var x2;  
maximize seats: 8*x1+12*x2;  
subject to Budget: 20*x1+40*x2<=200;  
subject to Fahrer: x1 + x2 <= 7;  
subject to limitx: 0<=x1<=6;  
subject to limity: 0<=x2<=4;
```

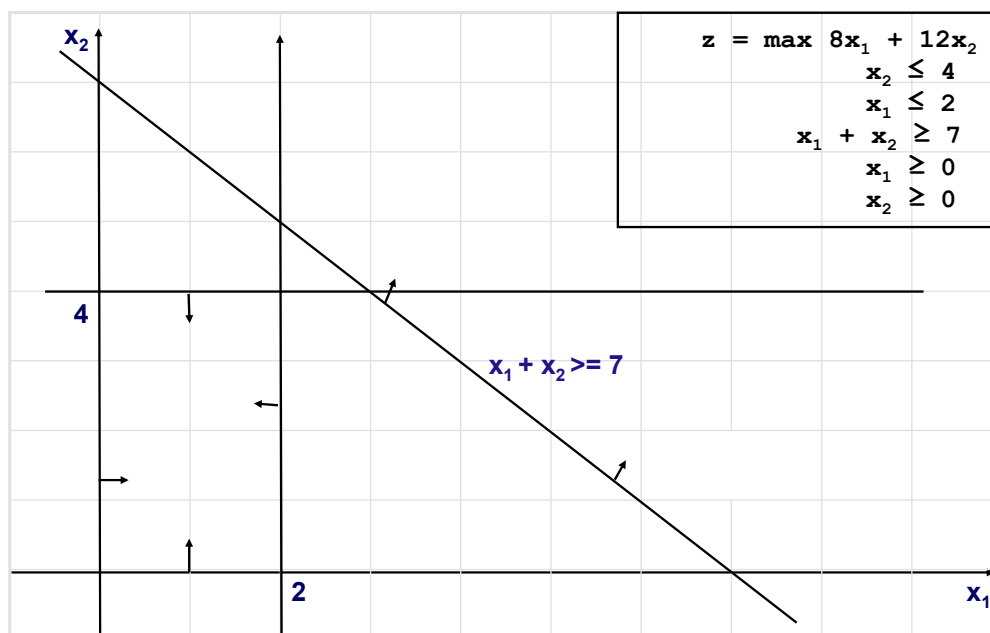
Optimierungssysteme - SS08

Mögliche Ergebnisse einer Optimierung

- Für ein Modell kann eine optimale Lösung bestimmt werden
- Infeasible: ein Modell weist keine zulässige Lösung auf, d.h. die gewählten Restriktionen sind in ihrer Gesamtheit nicht zu erfüllen.
- Unbounded: ein Modell ist unbeschränkt, d.h. die Zielfunktion ist nicht endlich.

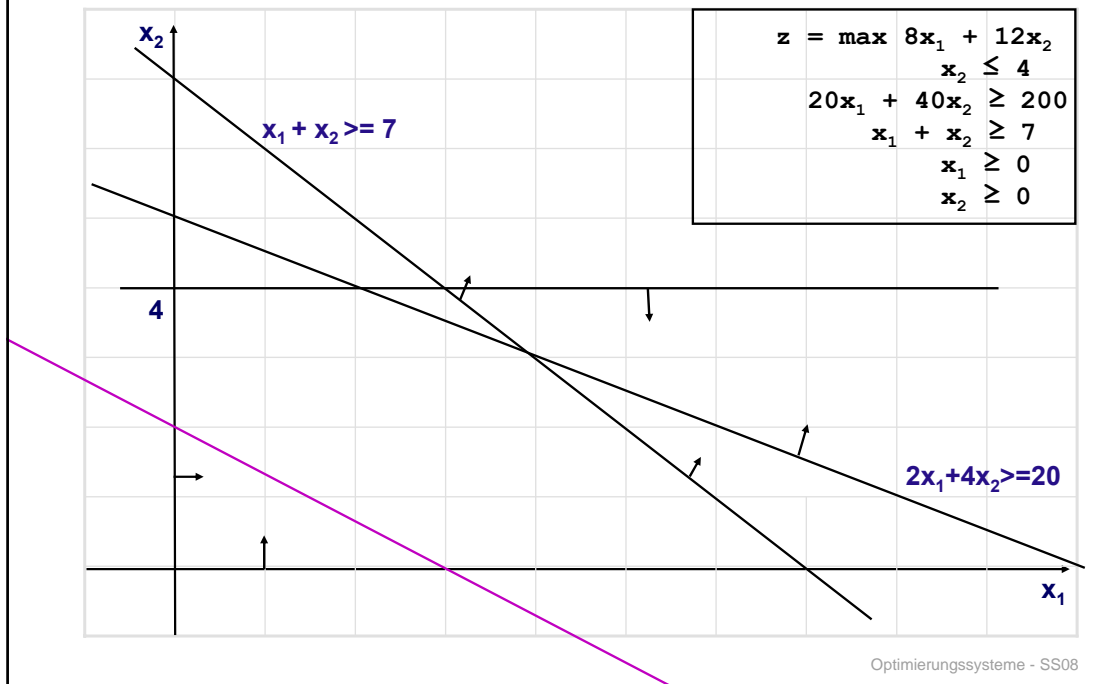
Optimierungssysteme - SS08

infeasible



Optimierungssysteme - SS08

unbounded



Übung 1

1. Ein Hersteller produziert zwei Sortimente. Bevor diese verkauft werden können, müssen folgende Prozesse durchlaufen werden: *schneiden*, *zusammenbauen*, *fertig stellen*. Es gibt keine Absatzobergrenzen. Sortiment 1 benötigt 25 Minuten zum Zerschneiden, 60 Minuten zum Zusammenbau und 68 Minuten, um es verkaufsfertig zu machen. Es erzielt 30 € Gewinn. Für Sortiment 2 werden 75 Minuten zum Schneiden, 60 Minuten für den Zusammenbau und 34 Minuten, zur Fertigstellung gebraucht. Dieses Sortiment erzielt einen Gewinn von 40 €. Es stehen nicht mehr als 450 Minuten zum Zerschneiden, 480 Minuten zum Zusammenbau und 476 Minuten zum Fertigstellen pro Tag zur Verfügung. Wie viele Artikel eines Sortiments müssen pro Tag produziert werden, um den Gewinn zu maximieren? Stellen Sie das Modell auf und lösen Sie es graphisch.

Erweiterung des Bus-Beispiels

- Es gibt nicht mehr nur 2 Bustypen sondern fünf zur Auswahl:

Typ	A	B	C	D	E
Mietpreis pro Tag	20€	40€	33€	12€	43€
Sitzplätze	8	12	15	7	13
Maxanzahl	6	4	2	3	4

- Es stehen weiterhin nur 200€ und 7 Fahrer zur Verfügung

$$\begin{aligned}
 z &= \max 8x_1 + 12x_2 + 15x_3 + 7x_4 + 13x_5 \\
 x_1 &\leq 6; \quad x_2 \leq 4; \quad x_3 \leq 2; \quad x_4 \leq 3; \quad x_5 \leq 4 \\
 20x_1 + 40x_2 + 33x_3 + 12x_4 + 43x_5 &\leq 200 \\
 x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 &\leq 7
 \end{aligned}$$

Optimierungssysteme - SS08

Lösung mit ClipMops

$$\begin{aligned}
 z &= \max 8x_1 + 12x_2 + 15x_3 + 7x_4 + 13x_5 \\
 x_1 &\leq 6; \quad x_2 \leq 4; \quad x_3 \leq 2; \quad x_4 \leq 3; \quad x_5 \leq 4 \\
 20x_1 + 40x_2 + 33x_3 + 12x_4 + 43x_5 &\leq 200 \\
 x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 &\leq 7
 \end{aligned}$$



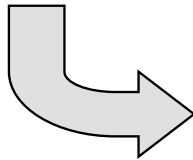
Bus	TYP A	TYP B	TYP C	TYP D	TYP E	TYP	RHS
MAX	8	12	15	7	13		
LB							
UB	6	4	2	3	4		
TYP	CON	CON	CON	CON	CON		
BUDGET	20	40	33	12	43	<=	200
FAHRER	1	1	1	1	1	<=	7
Activity	0,00	0,00	2,00	2,61	2,39		79,32

Optimierungssysteme - SS08

„Vereinfachte“ Darstellung

J : Indexmenge der Bustypen
 p_j : Mietpreis des Bustyps j , $j \in J$
 s_j : Sitzplätze des Bustyps j , $j \in J$
 m_j : Maximale Anzahl des Bustyps j , $j \in J$

$$\begin{aligned} z = \max & 8x_1 + 12x_2 + 15x_3 + 7x_4 + 13x_5 \\ & x_1 \leq 6; x_2 \leq 4; x_3 \leq 2; x_4 \leq 3; x_5 \leq 4 \\ & 20x_1 + 40x_2 + 33x_3 + 12x_4 + 43x_5 \leq 200 \\ & x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 \leq 7 \end{aligned}$$



$$\begin{aligned} \max & \sum_{j \in J} s_j x_j \\ & x_j \leq m_j, \quad \forall j \in J \\ & \sum_{j \in J} p_j * x_j \leq 200 \\ & \sum_{j \in J} x_j \leq 7 \end{aligned}$$

Optimierungssysteme - SS08

Model in AMPL

- Das Modell bleibt immer gleich, während J beliebig geändert werden kann.

```
busse
1  set J;
2
3  param s {J};
4  param m {J};
5  param p {J};
6
7  var x {J};
8
9  maximize Sitze: sum {j in J} s[j]*x[j];
10 subject to Anzahl {j in J}: 0<= x[j] <= m[j];
11 subject to Budget: sum {j in J} p[j]*x[j] <= 200;
12 subject to Fahrer: sum {j in J} x[j] <= 7;
```

BusModel Statistics Solution Summary LP Solution

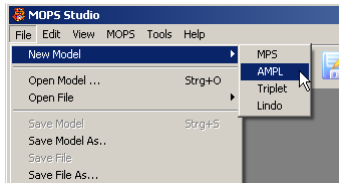
Optimierungssysteme - SS08

MOPS-Studio

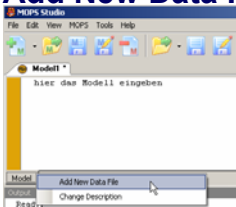
- Download von der Lehrstuhlseite.

- Passwort:

- File → New Model → AMPL



- Für das Modell und für die Daten wird jeweils eine Datei angelegt. (Für die Datendatei rechte Maustaste auf Model → Add New Data File)



Optimierungssysteme - SS08

AMPL - Deklarationen

- set J ;** Durch das Schlüsselwort *set* wird eine Menge deklariert.
- param b ;** Durch das Schlüsselwort *param* werden Parameter deklariert.
- var x ;** Durch das Schlüsselwort *var* werden Variablen deklariert.
- param $s\{J\}$;** Für jedes Element aus der Menge J wird ein s deklariert.
- var $x\{J\}$;** Für jedes Element aus der Menge J wird eine Variablen x deklariert.

Die grüne Farbe symbolisiert, dass ein beliebiger Name gewählt werden kann.

Optimierungssysteme - SS08

AMPL – Das Modell

■ Die Zielfunktion:

`maximize/minimize Zielfunktionsname: Zielfunktion;`

Beispiel:

`maximize Sitze: sum{j in J} s[j]* x[j];`

entspricht: $\max \sum_{j \in J} s_j x_j$

■ Summenfunktion:

■ `sum {j in J} x[j]`

Für alle Elemente der Menge J wird x_j aufsummiert.

■ `sum {j in J} s[j]* x[j]`

Für alle Elemente der Menge J wird s_j mit x_j multipliziert und die Produkte werden aufsummiert.

Punktrechnung geht vor Strichrechnung!

Optimierungssysteme - SS08

AMPL – Das Modell

■ Eine Restriktion:

`subject to/s.t. Restriktionsname: Restriktion;`

Beispiel:

`subject to Budget: sum {j in J} p[j]*x[j] <= 200;`

entspricht: $\sum_{j \in J} p_j * x_j \leq 200$

■ Mehrere gleiche Restriktionen:

eine Restriktion für jedes Element in der Menge J:

`subject to/s.t. Restriktionsname{j in J}: Restriktion;`

Beispiel:

`s.t. Anzahl {j in J}: 0 <= x[j] <= m[j];`

entspricht: $0 \leq x_j \leq m_j, \quad \forall j \in J$

Optimierungssysteme - SS08

AMPL- Regeln zur Syntax

- **Jede Anweisung endet mit einem Semikolon!**
 - Eine Anweisung kann folglich über mehrere Zeilen gehen (Achtung bei Kommentaren)
- **[]**: symbolisieren einen Index x_k entspricht $x[k]$
- **{ }**: symbolisieren Mengenangaben
- **Kommentare:**
 - **#** : leitet ein Kommentar. Mit dem Ende der Zeile endet auch der Kommentar
 - **/*** : leitet ein Kommentar ein der über mehrer Zeilen gehen kann und wieder geschlossen werden muss mit ***/**
 - ***/** : schließt einen Kommentar ab
- **Groß- und Kleinschreibung muss beachtet werden!**
- **Dezimalzahlen müssen mit Punkt geschrieben werden.**

Optimierungssysteme - SS08

Übung 2

- **Formulieren Sie das Modell aus Übung 1 in AMPL. Dabei soll S die Menge der verschiedenen Sortimente sein.**
 - Welche Mengen müssen deklariert werden?
 - Welche Parameter müssen deklariert werden?
 - Wie sieht das Modell aus?

Optimierungssysteme - SS08

AMPL- Daten

Deklarationen im Modell:

```
set Busse;  
param b;  
param Sitze{Busse};  
param Preis{Busse};  
var x{j in Busse};
```

Festlegung der Daten zu dem Modell:

- := Symbolisiert immer eine Wertzuweisung
- Elemente einer Menge werden nacheinander aufgeführt

```
set Busse := A B C D E;
```

- Parameterwertzuweisung

```
param b := 45.5;  
param Sitze := A 8 B 12 C 15 D 7 C 13;  
param Preis := A 20 B 40 C 33 D 12 C 43;
```

Optimierungssysteme - SS08

AMPL- Daten

Vereinfachte bzw. Alternative Darstellungsformen der Daten:

```
set Busse := A B C D E;  
param Sitze := A 8 B 12 C 15 D 7 C 13;  
param Preis := A 20 B 40 C 33 D 12 C 43;
```

```
param: Busse: Sitze := A 8 B 12 C 15 D 7 C 13;  
param Preis := A 20 B 40 C 33 D 12 C 43;
```

```
param: Busse: Sitze Preis := A 8 20 B 12 40 C 15 33 D 7 12 C 13 43;
```

```
param: Busse: Sitze Preis :=  
      A      8 20  
      B     12 40  
      C     15 33  
      D      7 12  
      C     13 43;
```

Elemente einer Menge können implizit angegeben werden.

Leerzeichen und Zeilenumbrüche werden ignoriert.

Optimierungssysteme - SS08