

Brückenkurs Mathematik

Algebra – Gleichungen – Summen – Mengen

1. Die reellen Zahlen
2. Ganzzahlige Potenzen
3. Regeln der Algebra
4. Brüche
5. Potenzen mit gebrochenen Exponenten
6. Ungleichungen
7. Intervalle und Absolutbeträge

Reelle Zahlen

Kapitel 1.1

Natürliche Zahlen: $1, 2, 3, 4, \dots$

Auch: Positive Zahlen

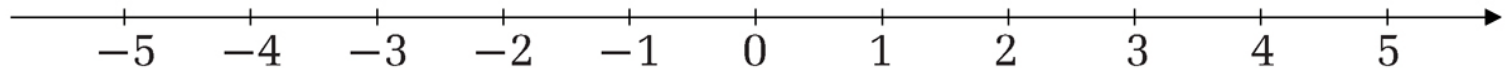
Gerade Zahlen: $2, 4, 6, \dots$

Ungerade Zahlen: $1, 3, 5, \dots$

Natürliche Zahlen: $1, 2, 3, 4, \dots$

Ganze Zahlen; $0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 4, \dots$

Darstellung auf der Zahlengeraden:



Rationale Zahlen: a/b , wobei a und $b \neq 0$ ganze Zahlen

Vier arithmetische Grundoperationen (Grundrechenarten):

- 1.) **Addition** $+$
- 2.) **Subtraktion** $-$
- 3.) **Multiplikation** $\cdot$
- 4.) **Division** $/$ oder $\div$

Wendet man diese vier Operationen auf zwei reelle Zahlen an, ist das Ergebnis wieder eine reelle Zahl.

Für jede reelle Zahl a gilt:

1.) Addition $a + 0 = 0 + a = a$

2.) Subtraktion $a - 0 = a$ $0 - a = -a$

3.) Multiplikation $a \cdot 0 = 0 \cdot a = 0$

4.) Division $0/a = 0$ für $a \neq 0$

$a/0$ ist nicht definiert!

$0/0$ ist nicht definiert!

Ganzzahlige Potenzen

Kapitel 1.2

n – te Potenz von a

$$2^2 = 2 \cdot 2 \quad 3^4 = 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3$$

$$a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot \dots \cdot a}_{n \text{ Faktoren}} \quad a \text{ Basis } \quad n \text{ Exponent}$$

$$a^1 = a \quad a^2 = a \cdot a \quad x^4 = \underbrace{x \cdot x \cdot x \cdot x}_{4 \text{ Faktoren}}$$

$$a = p/q, \quad n = 5 : \quad \left(\frac{p}{q}\right)^5 = \frac{p}{q} \cdot \frac{p}{q} \cdot \frac{p}{q} \cdot \frac{p}{q} \cdot \frac{p}{q}$$

Definition: $a^0 = 1$ für $a \neq 0$

ABER: 0^0 ist **NICHT** definiert!!!

$$3^{-2} = \text{????}$$

$$\text{Antwort: } 3^{-2} = 1/3^2 = 1/9$$

Definition: $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$ für

n natürliche Zahl und $a \neq 0$

$$a^r \cdot a^s = a^{r+s} \quad \text{Exponenten addieren}$$

$$(a^r)^s = a^{rs} \quad \text{Exponenten multiplizieren}$$

$$\frac{a^r}{a^s} = a^{r-s} \quad \text{Exponenten subtrahieren}$$

Eigenschaften von Potenzen

$$(ab)^r = a^r b^r$$

$$\left(\frac{a}{b}\right)^r = \underbrace{\frac{a}{b} \cdot \frac{a}{b} \cdot \dots \cdot \frac{a}{b}}_{r \text{ Faktoren}} = \frac{\overbrace{a \cdot a \cdot \dots \cdot a}^{r \text{ Faktoren}}}{\underbrace{b \cdot b \cdot \dots \cdot b}_{r \text{ Faktoren}}} = a^r b^{-r}$$

$$(abcde)^r = a^r b^r c^r d^r e^r$$

$$(a + b)^r = ???$$

Im allgemeinen gilt:

$$(a + b)^r \neq a^r + b^r$$

Zinseszinsrechnung

- Anfangskapital: K Euro, Zinssatz $p\%$
- Guthaben nach einem Jahr: $K + K \cdot p/100 = K(1 + p/100)$
- Wachstumsfaktor pro Jahr: $1 + p/100$
- Guthaben nach t Jahren:

$$K \left(1 + \frac{p}{100} \right)^t$$

Endbestand bei konstanter jährlicher Wachstumsrate

Eine Größe K , die pro Jahr um $p\%$ wächst, steigt in t Jahren an auf

$$K \left(1 + \frac{p}{100} \right)^t$$

Dabei heißt $1 + \frac{p}{100}$ der Wachstumsfaktor für ein Wachstum von $p\%$.

Endbestand bei konstanter jährlicher Abnahme

Eine Größe K , die pro Jahr um $p\%$ abnimmt, fällt in t Jahren auf

$$K \left(1 - \frac{p}{100} \right)^t$$

Dabei heißt $1 - \frac{p}{100}$ der Wachstumsfaktor für eine Abnahme um $p\%$.

Brauchen wir wirklich negative Exponenten?

Wieviel Geld x hätte man vor 5 Jahren bei einem Zinssatz von 8% anlegen müssen, um heute $1\,000$ Euro zu erhalten?

$$x \cdot (1.08)^5 = 1\,000$$

$$x = \frac{1\,000}{(1.08)^5} = 1\,000 \cdot (1.08)^{-5}$$

Man hätte vor t Jahren $P(1 + p/100)^{-t}$ Euro zu einem festen Zinssatz von $p\%$ pro Jahr anlegen müssen, um heute P Euro zu erhalten.

Regeln der Algebra

Kapitel 1.3

Elementare Regeln

$$(a) \textcolor{red}{a} + b = b + \textcolor{red}{a}$$

$$(g) 1 \cdot \textcolor{red}{a} = \textcolor{red}{a}$$

$$(b) (\textcolor{red}{a} + b) + c = a + (\textcolor{red}{b} + c)$$

$$(h) \textcolor{red}{a} \textcolor{red}{a}^{-1} = 1 \text{ für } a \neq 0$$

$$(c) \textcolor{red}{a} + 0 = \textcolor{red}{a}$$

$$(i) (-a)b = a(-b) = -ab$$

$$(d) \textcolor{red}{a} + (-\textcolor{red}{a}) = 0$$

$$(j) (-\textcolor{red}{a})(-\textcolor{red}{b}) = \textcolor{red}{a}b$$

$$(e) \textcolor{red}{a}b = ba$$

$$(k) \textcolor{red}{a}(b + c) = \textcolor{red}{a}b + \textcolor{red}{a}c$$

$$(f) (\textcolor{red}{a}b)c = a(\textcolor{red}{b}c)$$

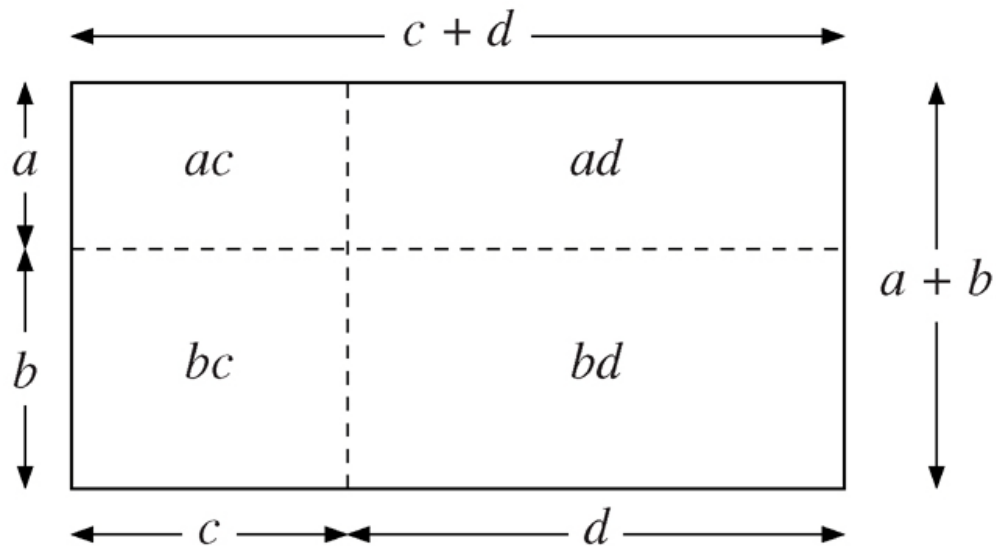
$$(l) (a + b)\textcolor{red}{c} = a\textcolor{red}{c} + b\textcolor{red}{c}$$

Einfache Folgerungen aus den elementaren Regeln

$$\textcolor{red}{a}(b - c) = \textcolor{red}{a}[b + (-c)] = \textcolor{red}{a}b + \textcolor{red}{a}(-c) = \textcolor{red}{a}b - \textcolor{red}{a}c$$

$$\textcolor{blue}{x}(a + b - c + d) = \textcolor{blue}{x}a + \textcolor{blue}{x}b - \textcolor{blue}{x}c + \textcolor{blue}{x}d$$

$$(a + b)(\textcolor{violet}{c} + \textcolor{violet}{d}) = a(\textcolor{violet}{c} + \textcolor{violet}{d}) + b(\textcolor{violet}{c} + \textcolor{violet}{d}) = ac + ad + bc + bd$$



Binomische Formeln

$$(a+b)^2 = (a+b)(a+b) = a^2 + 2ab + b^2$$

$$(a-b)^2 = (a-b)(a-b) = a^2 - 2ab + b^2$$

$$(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$$

Formel für die **Differenz von Quadraten**

$$12^2 - 7^2 = (12 + 7)(12 - 7) = 19 \cdot 5 = 95$$

Algebraische Ausdrücke

$$3xy - 5x^2y^3 + 2xy + 6y^3x^2 - 3x + 5yx + 8$$

Terme:

$$3xy, -5x^2y^3, 2xy, 6y^3x^2, -3x, 5yx, 8$$

Numerische Koeffizienten:

$$3, -5, 2, 6, -3, 5$$

Terme vom selben Typ:

$$3xy, 2xy, 5yx \quad \text{und} \quad -5x^2y^3, 6y^3x^2$$

1. Terme vom selben Typ sammeln
2. Numerische Koeffizienten an den Anfang
3. Buchstaben in alphabetischer Reihenfolge
4. Höhere Potenzen nach vorn
5. Mehr Faktoren nach vorn

Vereinfachung algebraischer Ausdrücke, Beispiel

$$3xy - 5x^2y^3 + 2xy + 6y^3x^2 - 3x + 5yx + 8$$

1. $3xy + 2xy + 5yx - 5x^2y^3 + 6y^3x^2 - 3x + 8$

2. Schon erledigt

3. $\underbrace{3xy + 2xy + 5xy}_{=10xy} - \underbrace{5x^2y^3 + 6x^2y^3}_{=x^2y^3} - 3x + 8$

4. $x^2y^3 + 10xy - 3x + 8$

5. Schon erledigt

$$49 = 7 \cdot 7$$

$$672 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 7$$

Einen Ausdruck in **Faktoren zerlegen** bedeutet, ihn als **Produkt von einfacheren Faktoren zu schreiben**.

$$6x^2y = 2 \cdot 3 \cdot x \cdot x \cdot y$$

$$5x^2y^3 - 15xy^2 = 5 \cdot x \cdot y \cdot y(xy - 3)$$

Brüche

Kapitel 1.4

Definitionen

$$a \div b = a/b = \frac{a}{b} \quad a \text{ Zähler} \quad b \text{ Nenner}$$

$5/8$ ist ein echter Bruch, da 5 kleiner ist als 8 .

$19/8$ ist ein unechter Bruch, da 19 größer ist als 8 .

Unechte Brüche können als gemischte Zahlen geschrieben werden:

$$\frac{19}{8} = \frac{16}{8} + \frac{3}{8} = 2 + \frac{3}{8} = 2\frac{3}{8}$$

Regeln für die Bruchrechnung, Kürzen

$$(1) \quad \frac{\overset{\text{blau}}{a} \cdot \cancel{c}}{\underset{\text{rot}}{b} \cdot \cancel{c}} = \frac{\overset{\text{blau}}{a}}{\underset{\text{rot}}{b}} \quad (\text{rot } b \neq 0 \text{ und } c \neq 0)$$

$$\frac{21}{15} = \frac{\overset{\text{blau}}{7} \cdot \cancel{3}}{\underset{\text{rot}}{5} \cdot \cancel{3}} = \frac{\overset{\text{blau}}{7}}{\underset{\text{rot}}{5}} \quad \underline{\text{Kürzen!}}$$

Kürzen = Vereinfachen von Brüchen:

Zähler und Nenner in Faktoren zerlegen und
gemeinsame Faktoren herausstreichen.

Regeln für die Bruchrechnung

$$(2) \quad \frac{-a}{-b} = \frac{a}{b} \qquad \frac{-5}{-6} = \frac{5}{6}$$

$$(3) \quad -\frac{a}{b} = (-1)\frac{a}{b} = \frac{(-1)a}{b} = \frac{-a}{b} = \frac{a}{-b}$$

$$(4) \quad \frac{a}{c} + \frac{b}{c} = \frac{a+b}{c} \qquad \frac{5}{3} + \frac{13}{3} = \frac{18}{3} = 6$$

Regeln für die Bruchrechnung

$$(5) \frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{a \cdot d + b \cdot c}{b \cdot d}$$

$$\frac{3}{5} + \frac{1}{6} = \frac{3 \cdot 6 + 5 \cdot 1}{5 \cdot 6} = \frac{23}{30}$$

$$(6) a + \frac{b}{c} = \frac{a \cdot c + b}{c}$$

$$5 + \frac{3}{5} = \frac{5 \cdot 5 + 3}{5} = \frac{28}{5}$$

$$(7) a \cdot \frac{b}{c} = \frac{a \cdot b}{c}$$

$$7 \cdot \frac{3}{5} = \frac{7 \cdot 3}{5} = \frac{21}{5}$$

Regeln für die Bruchrechnung

$$(8) \quad \frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{a \cdot c}{b \cdot d}$$

$$\frac{4}{7} \cdot \frac{5}{8} = \frac{4 \cdot 5}{7 \cdot 8} = \frac{\cancel{4} \cdot 5}{7 \cdot 2 \cdot \cancel{4}} = \frac{5}{14}$$

$$(9) \quad \frac{a}{b} \div \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c} = \frac{a \cdot d}{b \cdot c}$$

$$\frac{3}{8} \div \frac{6}{14} = \frac{3}{8} \cdot \frac{14}{6} = \frac{\cancel{3} \cdot \cancel{2} \cdot 7}{8 \cdot \cancel{2} \cdot \cancel{3}} = \frac{7}{8}$$

Potenzen mit gebrochenen Exponenten

Kapitel 1.5

$$K^{1/4} L^{3/4}$$

$$Ar^{2.08}p^{-1.5}$$

Wie definieren wir a^x für eine rationale Zahl x ?

$$a^{1/2} = \sqrt{a} \quad \text{falls } a \geq 0 \quad \text{Quadratwurzel}$$

Quadratwurzel aus a ist diejenige nichtnegative Zahl, die mit sich selbst multipliziert a ergibt.

Rechenregeln für Quadratwurzeln

$$\sqrt{ab} = \sqrt{a}\sqrt{b} \quad a, b \geq 0$$

$$\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} \quad a \geq 0, b > 0$$

$$(a + b)^r \neq a^r + b^r$$

Für $r = 1/2$ bedeutet das:

$$\sqrt{a + b} \neq \sqrt{a} + \sqrt{b} \quad (\text{im allgemeinen})$$

Quadratwurzel ist nichtnegativ!!!

$$(-2)^2 = 4 \quad \text{und} \quad 2^2 = 4$$

d.h. $x = -2$ und $x = 2$ sind Lösungen
der Gleichung $x^2 = 4$, d.h.

$$x^2 = 4 \iff x = \pm\sqrt{4} = \pm 2$$

Jedoch: $\sqrt{4} = 2$ und **NICHT** -2

Dritte oder kubische Wurzel

Was bedeutet $a^{1/n}$, wenn $a > 0$ und n eine **natürliche** Zahl ist?

$$5^{1/3} = ???$$

$$(a^r)^s = a^{rs} \quad \Rightarrow \quad (5^{1/3})^3 = 5^1 = 5$$

$5^{1/3}$ muss Lösung der Gleichung $x^3 = 5$ sein:

$$5^{1/3} := \sqrt[3]{5}$$

Eindeutige positive Lösung, die **kubische** Wurzel.

$$(a^{1/n})^n = a^1 = a$$

$a^{1/n}$ ist Lösung von $x^n = a$

$x^n = a$ hat eine eindeutige positive Lösung, die mit $\sqrt[n]{a}$, n -te Wurzel aus a bezeichnet wird:

$$a^{1/n} = \sqrt[n]{a}$$

n-te Wurzel

Wenn $a > 0$ und n eine natürliche Zahl, so ist $a^{1/n} = \sqrt[n]{a}$ die eindeutig bestimmte positive Zahl, deren n -te Potenz gleich a ist.

Es ist diejenige positive Zahl, die n -mal mit sich selbst multipliziert a ergibt.

$$(a^{1/n})^n = (\sqrt[n]{a})^n = \underbrace{\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{a} \cdot \dots \cdot \sqrt[n]{a}}_{n\text{-mal}} = a$$

Potenzen mit gebrochenen Exponenten

$$a^{p/q} = ???$$

p ganze Zahl, q natürliche Zahl und $a > 0$

$$5^{2/3} = \left(5^{1/3}\right)^2 = \left(\sqrt[3]{5}\right)^2$$

Definition:

$$a^{p/q} = \left(a^{1/q}\right)^p = \left(\sqrt[q]{a}\right)^p$$

Potenzen mit gebrochenen Exponenten

Definition:

$$a^{p/q} = \left(a^{1/q} \right)^p = \left(\sqrt[q]{a} \right)^p$$

Folgerung:

$$\begin{aligned} a^{p/q} &= \left(a^{1/q} \right)^p = a^{(1/q) \cdot p} = a^{p \cdot (1/q)} \\ &= \left(a^p \right)^{1/q} = \sqrt[q]{a^p} \end{aligned}$$

Warnungen:

$$(1 + r)^{20} \neq 1^{20} + r^{20}$$

$$u = 9 + x^{1/2} \not\Rightarrow u^2 = 81 + x$$

$$u = 9 + x^{1/2} \Rightarrow u^2 = 81 + 18\sqrt{x} + x$$

$$(e^x - e^{-x})^p \neq e^{xp} - e^{-xp}$$

Es sei denn $p = 1$.

Ungleichungen

Kapitel 1.6

Was heißt *3 ist Größer als 2*?

Reelle Zahlen bestehen aus:

1. **Positive** Zahlen: $a > 0$ oder $0 < a$ a ist größer als 0.
2. **Null**: 0
3. **Negative** Zahlen: $c < 0$ oder $0 > c$ c ist kleiner als 0.

$$a > 0 \text{ und } b > 0 \implies a + b > 0 \text{ und } a \cdot b > 0$$

Definition:

Die Zahl a ist **größer** als die Zahl b , wenn $a - b$ positiv ist. Wir schreiben dann:

$$a > b \quad \text{oder} \quad b < a$$

Strikte und Schwache Ungleichungen

$a > b$ a ist **strikt größer** als b

Wenn $a > b$ oder $a = b$, d.h. a ist **größer oder gleich**, schreiben wir $a \geq b$.

$a \geq b$ bedeutet $a - b \geq 0$

$>$ und $<$ **Strikte** Ungleichungen

$\geq$ und $\leq$ **Schwache** Ungleichungen

Rechenregeln für Ungleichungen

$$a > b \implies a + c > b + c \text{ für alle } c \quad (2)$$



$$a > b \text{ und } b > c \implies a > c \quad (3)$$

$$a > b \text{ und } c > 0 \implies ac > bc \quad (4)$$

$$a > b \text{ und } c < 0 \implies ac < bc \quad (5)$$

$$a > b \text{ und } c > d \implies a + c > b + d \quad (6)$$

Dasselbe gilt für $\geq$ statt $>$.

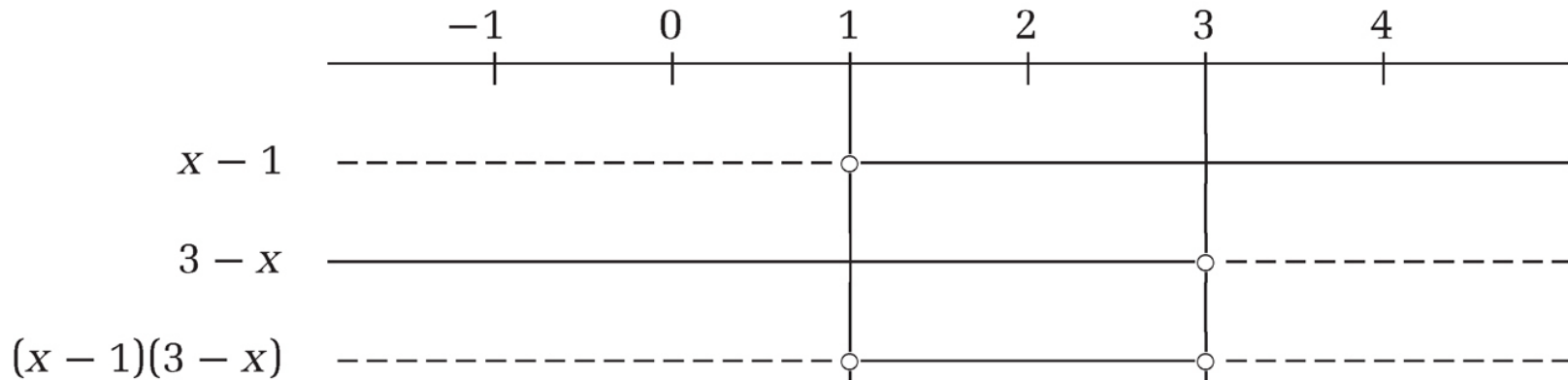
Multiplikation einer Ungleichung mit einer Zahl

- (4) Wenn beide Seiten einer Ungleichung mit einer **positiven Zahl multipliziert** werden, **bleibt die Richtung der Ungleichung erhalten**.
- (5) Wenn beide Seiten einer Ungleichung mit einer **negativen Zahl multipliziert** werden, **kehrt sich die Richtung der Ungleichung um**.

Vorzeichendiagramme, Beispiel 2

Für welche Werte von x gilt: $(x - 1)(3 - x) > 0$??

$(x - 1)(3 - x) > 0$ dann und nur dann, wenn $1 < x < 3$



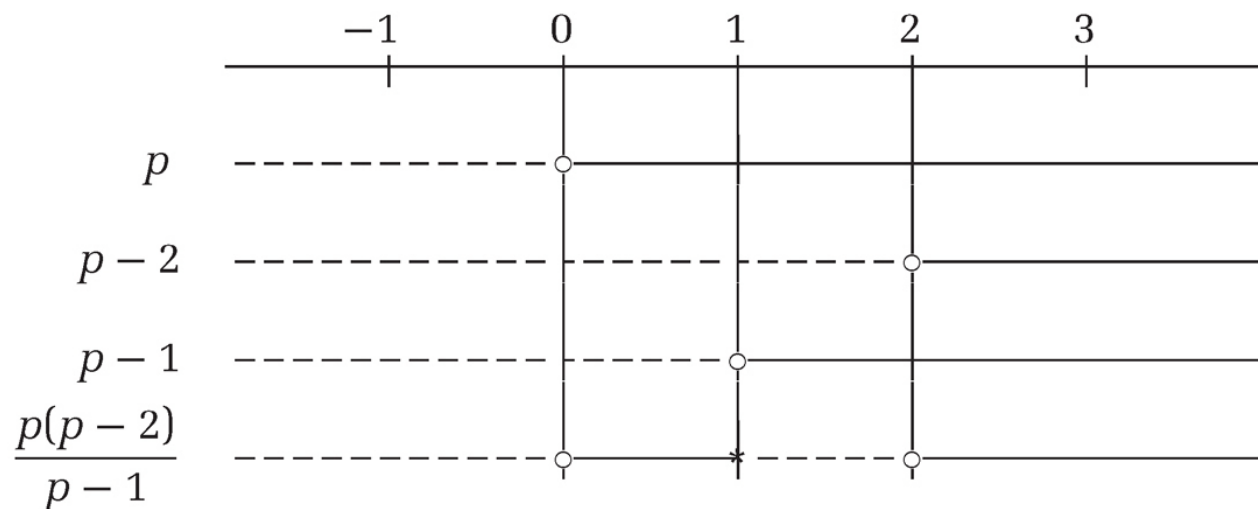
Die Ungleichung gilt für $1 < x < 3$.

Vorzeichendiagramme, Beispiel 3

Für welche Werte von p gilt: $\frac{2p-3}{p-1} > 3-p$??

$$\frac{2p-3}{p-1} > 3-p \iff \frac{2p-3}{p-1} + p-3 > 0 \iff \frac{2p-3 + (p-3)(p-1)}{p-1} > 0$$

$$\iff \dots \iff \frac{p(p-2)}{p-1} > 0$$



Die Ungleichung gilt genau dann, wenn $0 < p < 1$ oder $p > 2$.

Doppel-Ungleichungen

Wenn $a \leq z$ und $z < b$, d.h. a ist kleiner oder gleich z und gleichzeitig ist z kleiner als b , dann schreiben wir:

$$a \leq z < b$$

Ungleichheitszeichen nur in einer Richtung erlaubt!

Nicht erlaubt ist:

$$a \leq z > b$$

Intervalle und Absolutbeträge

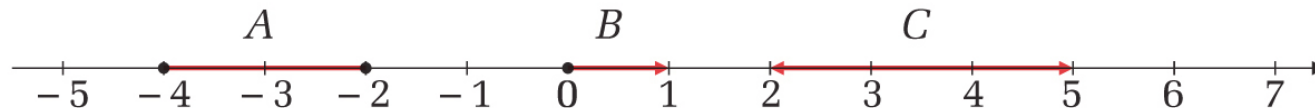
Kapitel 1.7

Definition: Intervalle

Notation	Name	Enthält x mit:
(a, b)	<u>Offenes</u> Intervall von a bis b	$a < x < b$
$[a, b]$	<u>Abgeschlossenes</u> Intervall von a bis b	$a \leq x \leq b$
$(a, b]$	<u>Halboffenes</u> Intervall von a bis b	$a < x \leq b$
$[a, b)$	<u>Halboffenes</u> Intervall von a bis b	$a \leq x < b$

Die Länge aller Intervalle ist $b - a$.

Alle Intervalle sind **beschränkt**.



$$A = [-4, -2], \quad B = [0, 1), \quad C = (2, 5)$$

Das Symbol für „Unendlich“

Symbol ∞ für „Unendlich“

∞ ist **keine** Zahl, sondern ein Symbol.

Übliche Rechenregeln gelten **NICHT** für ∞ .

Unbeschränkte Intervalle

$[a, \infty)$ = alle Zahlen x mit $x \geq a$

$(-\infty, b)$ = alle Zahlen x mit $x < b$

Das Intervall $[a, \infty)$ hat keine **obere** Schranke.

Das Intervall $(-\infty, b)$ hat keine **untere** Schranke.

Die Menge **aller reellen Zahlen** ist: $(-\infty, \infty)$

Absolutbetrag

Sei a Zahl auf der reellen Zahlengeraden.

Abstand zwischen a und 0 heißt **Absolutbetrag**

von a und wird mit $|a|$ bezeichnet.

$$|a| = \begin{cases} a & \text{falls } a \geq 0 \\ -a & \text{falls } a < 0 \end{cases}$$

Abstand zwischen zwei Punkten auf der Zahlengeraden

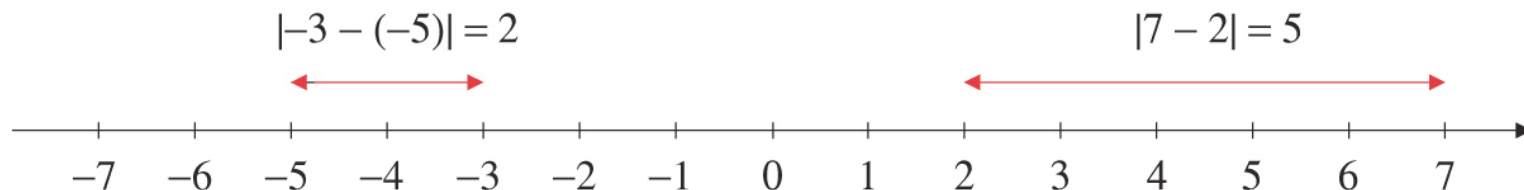
Abstand zwischen x_1 und x_2

$$x_1 - x_2 \quad \text{wenn} \quad x_1 \geq x_2$$

$$-(x_1 - x_2) \quad \text{wenn} \quad x_1 < x_2$$

D.h. **Abstand** zwischen x_1 und x_2 ist:

$$|x_1 - x_2| = |x_2 - x_1|$$



Ungleichungen mit Absolutbeträgen

$$|x| < a \quad \text{bedeutet} \quad -a < x < a$$

$$|x| \leq a \quad \text{bedeutet} \quad -a \leq x \leq a$$

Das Lösen einfacher Gleichungen

Kapitel 2.1

1. Lösen einfacher Gleichungen
2. Gleichungen mit Parametern
3. Quadratische Gleichungen
4. Lineare Gleichungen in zwei Unbekannten
5. Nichtlineare Gleichungen

Drei einfache Beispiele

(a) $3x + 10 = x + 4$

Eine Variable x

(b) $\frac{z}{z-5} + \frac{1}{3} = \frac{-5}{5-z}$

Eine Variable z

(c) $Y = C + I$

Drei Variablen Y , C und I

Lösen einer Gleichung:

Alle Werte der **Variablen** finden, die die Gleichung erfüllen.

Lösen der Gleichung (a)

$$3x + 10 = x + 4 \quad | - x$$

$$2x + 10 = 4 \quad | - 10$$

$$2x = 4 - 10 = -6 \quad | \div 2$$

$$x = -3$$

Gleichung (a) hat eine eindeutige Lösung $x = -3$.

Nicht zulässige Werte

Wenn **irgendein Wert** einer Variablen zu einem **undefinierten Ausdruck** in der **Gleichung** führt, so ist **dieser Wert nicht zulässig**, d.h. er ist für diese Gleichung nicht erlaubt.

$$(b) \quad \frac{z}{z-5} + \frac{1}{3} = \frac{-5}{5-z}$$

$z = 5$ **nicht zulässig**, da $5/0$ und $-5/0$ **nicht definiert!**

Lösen der Gleichungen (b) und (c)

Gleichung (b) $\frac{z}{z-5} + \frac{1}{3} = \frac{-5}{5-z}$

hat **keine Lösung**, wird in Beispiel 3 gezeigt.

Gleichung (c) $Y = C + I$ hat **viele Lösungen**:

z. B. $Y = 1\,000$ $C = 700$ $I = 300$

oder $Y = 1\,300$ $C = 800$ $I = 500$

oder $Y = 1\,100$ $C = 700$ $I = 400$

Anzahl der Lösungen der drei Gleichungen

(a) $3x + 10 = x + 4$

Genau eine Lösung

(b) $\frac{z}{z-5} + \frac{1}{3} = \frac{-5}{5-z}$

Keine Lösung

(c) $Y = C + I$

Unendlich viele Lösungen

Äquivalente Gleichungen

Zwei **Gleichungen** sind äquivalent, wenn sie genau dieselben Lösungen haben.

Um **äquivalente Gleichungen** zu erhalten, sind die folgenden **Operationen auf beiden Seiten des Gleichheitszeichens** erlaubt:

- (A) **Addition** derselben Zahl oder **Subtraktion** derselben Zahl
- (B) **Multiplikation** mit derselben Zahl $\neq 0$ oder **Division** durch dieselbe Zahl $\neq 0$

Gleichungen mit Klammern und Brüchen

Beispiel 1: $6p - \frac{1}{2}(2p - 3) = 3(1 - p) - \frac{7}{6}(p + 2)$

Beispiel 2: $\frac{x + 2}{x - 2} - \frac{8}{x^2 - 2x} = \frac{2}{x}$

Lösungstip:

1. Klammern ausmultiplizieren
2. Mit kleinstem gemeinsamen Nenner multiplizieren

Beispiel 3: Lösen der Gleichung (b)

$$(b) \frac{z}{z-5} + \frac{1}{3} = \frac{-5}{5-z}$$

Lösung:

$z = 5$ nicht zulässig! Unter dieser Restriktion multiplizieren wir mit $3(z-5)$

$$3z + z - 5 = 15 \iff 4z = 20 \iff z = 5$$

Die Lösung $z = 5$ ist jedoch nicht zulässig. Daher gibt es keine Lösung der Gleichung (b).

Gleichungen mit Parametern

Kapitel 2.2

Beispiele linearer Gleichungen in zwei Variablen

$$(a) \quad y = 10x \qquad (b) \quad y = 3x + 4 \qquad (c) \quad y = -\frac{8}{3}x - \frac{7}{2}$$

Gemeinsame Struktur:

$$y = ax + b \qquad (1)$$

a , b reelle Zahlen $a = 3$, $b = 4$ in Gleichung (b)

a und b heißen **Parameter**

(1) beschreibt die allgemeine **lineare Gleichung** (Kap. 4.4)

Beispiel 1: Makroökonomisches Modell

$$\begin{aligned} Y &= C + \bar{I} \\ C &= a + bY \end{aligned} \quad (*)$$

Y Bruttoinlandsprodukt (BIP), C Konsum, $\bar{I}$ Investition
 a und b positive Parameter des Modells mit $b < 1$

Spezialfälle des Modells:

(i) $\bar{I} = 100, a = 500, b = 0.8$

(ii) $\bar{I} = 150, a = 600, b = 0.9$

(i)
$$\begin{aligned} Y &= C + 100 \\ C &= 500 + 0.8Y \end{aligned}$$

(ii)
$$\begin{aligned} Y &= C + 150 \\ C &= 600 + 0.9Y \end{aligned}$$

Beispiel 1: Lösung

$$\begin{aligned}\mathbf{Y} &= \mathbf{C} + \bar{\mathbf{I}} \\ \mathbf{C} &= \mathbf{a} + \mathbf{bY}\end{aligned}\quad (*)$$

Löse (*) nach $\mathbf{Y}$ auf in Abhängigkeit von $\bar{\mathbf{I}}$ und den Parametern

Lösung:

Setze $\mathbf{C} = \mathbf{a} + \mathbf{bY}$ in erste Gleichung.

$$\begin{aligned}\mathbf{Y} &= \mathbf{a} + \mathbf{bY} + \bar{\mathbf{I}} \\ \mathbf{Y} - \mathbf{bY} &= \mathbf{a} + \bar{\mathbf{I}} \\ (1 - \mathbf{b})\mathbf{Y} &= \mathbf{a} + \bar{\mathbf{I}} \\ \mathbf{Y} &= \frac{\mathbf{a}}{1 - \mathbf{b}} + \frac{1}{1 - \mathbf{b}}\bar{\mathbf{I}}\end{aligned}$$

Beispiel 1: Strukturelle und reduzierte Form des Modells

$$\begin{aligned} \mathbf{Y} &= \mathbf{C} + \bar{\mathbf{I}} \\ \mathbf{C} &= \mathbf{a} + \mathbf{bY} \end{aligned} \quad (*) \quad \text{Strukturelle Form}$$

Lösung:

$$\mathbf{Y} = \frac{\mathbf{a}}{1 - \mathbf{b}} + \frac{1}{1 - \mathbf{b}} \bar{\mathbf{I}} \quad (**) \quad \text{Reduzierte Form}$$

Die Gleichung muss **nur einmal gelöst** werden.

Einsetzen numerischer Werte für die Parameter ergibt Lösung für Spezialfall, z.B. für $\bar{\mathbf{I}} = 100$, $\mathbf{a} = 100$, $\mathbf{b} = 0.8$ ergibt sich

$$\mathbf{Y} = \frac{100}{1 - 0.8} + \frac{1}{1 - 0.8} 100 = 1\,000 \quad \Rightarrow \quad \mathbf{C} = 100 + 0.8 \cdot 1\,000 = 900$$

Quadratische Gleichungen

Kapitel 2.3

Quadratische Gleichung in (a, b)- und (p, q)-Form

$$ax^2 + bx + c = 0 \quad (a \neq 0)$$

a , b und c Konstante, x Unbekannte

Division durch a ergibt die äquivalente Gleichung:

$$x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0 \quad (1)$$

Mit $p = b/a$ und $q = c/a$ ergibt sich

$$x^2 + px + q = 0 \quad (2)$$

Lösung der quadratischen Gleichung in Spezialfällen

$$x^2 + px + q = 0 \quad (2)$$

1. Spezialfall: $q = 0$, d.h.

$$x^2 + px = 0$$

$$x^2 + px = 0 \iff x(x + p) = 0$$

$$x(x + p) = 0 \iff x = 0 \quad \text{oder} \quad x + p = 0$$

$$x + p = 0 \iff x = -p$$

$$x^2 + px = 0 \iff x = 0 \quad \text{oder} \quad x = -p$$

Lösung der quadratischen Gleichung in Spezialfällen

$$x^2 + \textcolor{red}{p}x + \textcolor{blue}{q} = 0 \quad (2)$$

2. Spezialfall: $\textcolor{red}{p} = 0$, d.h.

$$x^2 + \textcolor{blue}{q} = 0$$

$$x^2 + \textcolor{blue}{q} = 0 \iff x^2 = -\textcolor{blue}{q}$$

Fall 1: $\textcolor{blue}{q} > 0$: Die Gleichung hat **keine Lösung**.

Fall 2: $\textcolor{blue}{q} \leq 0$:

$$x^2 + \textcolor{blue}{q} = 0 \iff x = \pm \sqrt{-\textcolor{blue}{q}} \quad (\textcolor{blue}{q} \leq 0)$$

Beispiel 2: Methode der quadratischen Ergänzung

$$x^2 + 8x - 9 = 0 \iff x^2 + 8x = 9$$

$$x^2 + 8x = 9 \iff \underbrace{x^2 + 8x + 16}_{(x+4)^2} = 9 + 16 = 25$$

16 ist die **quadratische Ergänzung** zu $x^2 + 8x$, denn $x^2 + 8x + 16 = (x + 4)^2$ ist ein **vollständiges Quadrat**.

$$\underbrace{(x + 4)^2}_{=: z} = 25 \qquad z^2 = 25 \iff z = \pm\sqrt{25} = \pm 5$$

$$x + 4 = 5 \quad \text{oder} \quad x + 4 = -5, \text{ d.h.}$$

die Lösungen der Gleichung sind $x = 1$ und $x = -9$.

Beispiel 2: Eine alternative Lösung

$$\boxed{x^2 + 8x - 9 = 0} \iff (x + 4)^2 = 25$$

$$(x + 4)^2 = 5^2 \iff (x + 4)^2 - 5^2 = 0 \iff$$

Binomische Formel für die Differenz von Quadraten

$$(x + 4 - 5)(x + 4 + 5) = 0 \iff (x - 1)(x + 9) = 0$$

Faktorenzerlegung: $x^2 + 8x - 9 = (x - 1)(x + 9)$

$$(x - 1)(x + 9) = 0 \text{ genau dann, wenn } x = 1 \text{ oder } x = -9$$

Allgemeiner Fall: Die (p, q) - Formel

$$x^2 + px + q = 0 \quad (2)$$

Für $p^2/4 - q \geq 0$ gilt:

$$x^2 + px + q = 0 \iff x = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}$$

Für $p^2/4 - q < 0$ gibt es **keine reellen Lösungen**.

Der allgemeine Fall: Die (a, b)-Formel

$$ax^2 + bx + c = 0 \quad (a \neq 0) \quad (1)$$

Für $b^2 - 4ac \geq 0$ und $a \neq 0$ gilt:

$$ax^2 + bx + c = 0 \iff x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Für $b^2 - 4ac < 0$ gibt es **keine reellen Lösungen**.

Die Lösungen heißen auch **Wurzeln** der quadratischen Gleichung.

Faktorenzerlegung einer quadratischen Gleichung

Wenn x_1 und x_2 Lösungen von $ax^2 + bx + c = 0$,
so gilt:

$$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$$

Dies gilt für $b^2 - 4ac \geq 0$.

Für $b^2 - 4ac = 0$ gilt $x_1 = x_2$ und somit:

$$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)^2 = a(x - x_2)^2$$

Für $b^2 - 4ac < 0$ gibt es **keine** Faktorenzerlegung.

Summe und Produkt der Lösungen

$$ax^2 + bx + c = 0 \quad (a \neq 0)$$

$$x^2 + px + q = 0 \quad p = \frac{b}{a} \quad q = \frac{c}{a}$$

Wenn x_1 und x_2 Lösungen sind, so gilt:

$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} = -p \quad x_1 x_2 = \frac{c}{a} = q$$

Lineare Gleichungen in zwei Unbekannten

Kapitel 2.4

Beispiel 1: Bestimmen Sie die Lösungen von

$$\begin{aligned} 2x + 3y &= 18 \\ 3x - 4y &= -7 \end{aligned} \quad (*)$$

Zwei Gleichungen und **zwei Unbekannte** x und y

Gesucht sind die **Werte** von x und y , die **beide Gleichungen** erfüllen.

- Lösen durch Probieren gelingt nur mit Glück.
- Gefragt sind systematische Methoden.

Methode 1: Einsetzungsmethode

- 1.) Lösen Sie **eine Gleichung nach einer Variablen** auf.
- 2.) **Setzen** Sie das Ergebnis in die **andere Gleichung ein**.

1.) Gleichung 1 nach **y** auflösen:

$$2x + 3y = 18 \Rightarrow 3y = 18 - 2x \Rightarrow y = 6 - \frac{2}{3}x$$

2.) Einsetzen in Gleichung 2: $3x - 4(6 - \frac{2}{3}x) = -7 \iff$

$$3x - 24 + \frac{8}{3}x = -7 \iff 9x - 72 + 8x = -21 \iff$$

$$17x = 51 \iff x = 3$$

$$y = 6 - \frac{2}{3}x \text{ und } x = 3 \Rightarrow y = 6 - \frac{2}{3} \cdot 3 = 6 - 2 = 4$$

Beispiel 1: Überprüfung der Lösung

$$\begin{aligned} 2x + 3y &= 18 \\ 3x - 4y &= -7 \end{aligned} \quad (*)$$

Lösung: $x = 3$ und $y = 4$

Probe: Werte für x und y in Gleichungen $(*)$ einsetzen:

$$\text{Gleichung 1: } 2 \cdot 3 + 3 \cdot 4 = 6 + 12 = 18$$

$$\text{Gleichung 2: } 3 \cdot 3 - 4 \cdot 4 = 9 - 16 = -7$$

Methode 2: Eliminationsmethode

Eine der beiden Variablen wird **eliminiert**, indem ein geeignetes Vielfaches der einen Gleichung zur anderen Gleichung addiert oder subtrahiert wird.

$$2x + 3y = 18 \quad | \cdot 4$$

$$3x - 4y = -7 \quad | \cdot 3$$

$$8x + 12y = 72$$

+

$$9x - 12y = -21$$

$$17x = 51$$

$$\Leftrightarrow x = 3$$

Setze $x = 3$ z.B. in Gleichung 1 ein und löse nach y .

$$2 \cdot 3 + 3y = 18 \Rightarrow 3y = 18 - 6 = 12 \Rightarrow y = 4$$

Allgemeine Lösung: Zwei Gleichungen, zwei Unbekannte

$$a\textcolor{red}{x} + b\textcolor{blue}{y} = c$$

$$d\textcolor{red}{x} + e\textcolor{blue}{y} = f$$

Lösungen:

$$\textcolor{red}{x} = \frac{ce - bf}{ae - bd} \qquad \textcolor{blue}{y} = \frac{af - cd}{ae - bd}$$

Voraussetzung:

$$ae - bd \neq 0$$

Summennotation

Kapitel 3.1

Definitionen

$$N_1 + N_2 + N_3 + N_4 + N_5 + N_6 = \sum_{i=1}^6 N_i$$

Σ Sigma Summationssymbol

i Summationsindex

1 und 6 Summationsgrenzen

Summe von $i = 1$ bis $i = 6$ über N_i

$$N_1 + N_2 + \dots + N_n = \sum_{i=1}^n N_i$$

p, q ganze Zahlen mit $q \geq p$

$$\sum_{i=p}^q a_i = a_p + a_{p+1} + a_{p+2} + \dots + a_q$$

Beispiel 1:

$$\begin{aligned} \text{(a)} \quad \sum_{i=1}^5 i^2 &= 1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + 5^2 \\ &= 1 + 4 + 9 + 16 + 25 = 55 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{(b)} \quad \sum_{k=3}^6 (5k - 3) &= \\ (5 \cdot 3 - 3) + (5 \cdot 4 - 3) + (5 \cdot 5 - 3) + (5 \cdot 6 - 3) &= 78 \end{aligned}$$

Beispiel 1:

$$(c) \sum_{j=0}^2 \frac{1}{(j+1)(j+3)}$$

$$= \frac{1}{(0+1) \cdot (0+3)} + \frac{1}{(1+1) \cdot (1+3)} + \frac{1}{(2+1) \cdot (2+3)}$$

$$= \frac{1}{1 \cdot 3} + \frac{1}{2 \cdot 4} + \frac{1}{3 \cdot 5} = \frac{40 + 15 + 8}{120} = \frac{63}{120} = \frac{21}{40}$$

Beispiel 2:

$$(a) \sum_{i=1}^n p_t^{(i)} q^{(i)} = p_t^{(1)} q^{(1)} + p_t^{(2)} q^{(2)} + \dots + p_t^{(n)} q^{(n)}$$

$$(b) \sum_{j=-3}^1 x^{5-j} y^j =$$

$$x^{5-(-3)} y^{-3} + x^{5-(-2)} y^{-2} + x^{5-(-1)} y^{-1} + x^{5-0} y^0 + x^{5-1} y^1 =$$

$$x^8 y^{-3} + x^7 y^{-2} + x^6 y^{-1} + x^5 + x^4 y$$

Beispiel 2:

$$(c) \sum_{i=1}^N (x_{ij} - \bar{x}_j)^2 =$$

$$(x_{1j} - \bar{x}_j)^2 + (x_{2j} - \bar{x}_j)^2 + \dots + (x_{Nj} - \bar{x}_j)^2$$

Regeln für Summen

Kapitel 3.2

Rechenregeln für Summen

$$\sum_{i=1}^n (a_i + b_i) = \sum_{i=1}^n a_i + \sum_{i=1}^n b_i \quad \text{Additivität}$$

$$\sum_{i=1}^n c a_i = c \sum_{i=1}^n a_i \quad \text{Homogenität, d.h.}$$

konstante Faktoren können vor die Summe gezogen werden

$$\sum_{i=1}^n c = nc, \quad \text{d.h. Summe über eine Konstante =}$$

Anzahl der Summanden mal **Konstante**

Beispiel: Das arithmetische Mittel oder der Mittelwert

Gegeben T Zahlen: $x_1, x_2, \dots, x_T$

$$\mu_x = \frac{1}{T} \sum_{i=1}^T x_i \quad \text{Mittelwert}$$

Behauptung: $\sum_{i=1}^T (x_i - \mu_x) = 0, \quad \text{d.h.}$

die **Summe** der Abweichungen vom **Mittelwert** ist **Null**.

Beweis: $\sum_{i=1}^T (x_i - \mu_x) = \sum_{i=1}^T x_i - \sum_{i=1}^T \mu_x =$

$$\sum_{i=1}^T x_i - T\mu_x = T\mu_x - T\mu_x = 0$$

Beispiel: Summe der quadratischen Abweichungen vom Mittelwert

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^T (x_i - \mu_x)^2 &= \sum_{i=1}^T (x_i^2 - 2\mu_x x_i + \mu_x^2) = \sum_{i=1}^T x_i^2 - 2\mu_x \sum_{i=1}^T x_i + \sum_{i=1}^T \mu_x^2 \\ &= \sum_{i=1}^T x_i^2 - 2\mu_x T\mu_x + T\mu_x^2 = \sum_{i=1}^T x_i^2 - T\mu_x^2\end{aligned}$$

$$\sum_{i=1}^T (x_i - \mu_x)^2 = \sum_{i=1}^T x_i^2 - T\mu_x^2$$

$$\frac{1}{T} \sum_{i=1}^T (x_i - \mu_x)^2 = \frac{1}{T} \sum_{i=1}^T x_i^2 - \mu_x^2$$

Mittlere quadratische Abweichung vom Mittelwert

Nützliche Formeln

$$\sum_{i=1}^n i = 1 + 2 + \dots + n = \frac{1}{2}n(n+1)$$

Summe der Zahlen von 1 bis n

$$\sum_{i=1}^n i^2 = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2 = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$$

Summe der Quadratzahlen

$$\sum_{i=1}^n i^3 = 1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + n^3 = \left[\frac{1}{2}n(n+1) \right]^2 = \left(\sum_{i=1}^n i \right)^2$$

Summe der Kubikzahlen