
Aufgaben

Aufgabe 1 (Potenzrechnung)

Vereinfachen Sie so weit wie möglich:

a) $3^{-1} \cdot 2^4 \cdot 3^3 \cdot 2^{-5}$

e) $a^4 \cdot b \cdot c^3 \cdot b^{-1} \cdot c^2 \cdot a^{-2}$

b) $8^{-2} \cdot 4^{-4} \cdot 8^3 \cdot 4^3$

f) $s^3 \cdot t^{-2} \cdot u^4 \cdot t^3 \cdot s^{-4} \cdot u^{-2}$

c) $2^m \cdot 3^n \cdot 2^{-n} \cdot 3^{-m}$

g)* $\frac{a^5}{a^{-3}}$

d) $4^p \cdot 3^q \cdot 4^{-2p} \cdot 3^{2q}$

h)* $(-1)^{2n} + (-1)^{2m+1}$, mit $n, m \in \mathbb{Z}$

Aufgabe 2 (Anwendung von Potenzen: Prozentrechnung)

Lösen Sie folgende Aufgaben:

- a) Studierende bekommen auf ein Software-Paket für 199 € beim Kauf 30% Ermäßigung. Was kostet das Software-Paket für Studierende?
- b) Auf einem Sparkonto wird ein einmaliger Betrag von 500 € am Anfang eines Kalenderjahres eingezahlt. Die Bank zahlt 4% Zinsen pro Jahr. Über welchen Betrag kann nach 5 Jahren verfügt werden?
- c) Wie viel Geld hätten Sie vor 5 Jahren bei einem Zinssatz von 8% bei der Bank anlegen müssen, um heute 1.000 € zu haben?

Aufgabe 3 (Klammerrechnung)

Vereinfachen Sie so weit wie möglich:

a) $3 \cdot 4 - 2 \cdot 6 - 3(4 - 5)$

e) $(2pq - 3p^2)(p + 2q) - (q^2 - 2pq)(2p - q)$

b) $2 \cdot 5 - 3 \cdot 4 + 3(6 - 5)$

f) $[(8 - 6)3 + 4(8 + 3 \cdot 2 - 7) - 2] \div 16$

c) $(5a - 2b) - (-3a + 7b) - (6a - 8b)$

g)* $(4p - 3q) - (-8p - 4q) - (3p + 6q)$

d) $cd - d(a - b) + (-a + c)(-d)$

h)* $[(4 - 2)5 + 3[(2 - 12 \cdot 3 + 40) - 3]] \div 19$

Aufgabe 4 (Binomische Formeln)

Beseitigen Sie die Klammern (a,b,d,e,g,h) bzw. zerlegen Sie die Ausdrücke in Faktoren (c,f,i).

a) $(1 - x)^2$

f) $9x^2 - 49$

b) $4(u + 1)^2$

g) $(2a + 3b)(2a - 3b)$

c) $a^2 - 4ab + 4b^2$

h)* $(3x + 4y)^2$

d) $(3u - 5v)^2$

i)* $4z^2 - 25w^2$

e) $(x + 2)(x - 2)$

Aufgabe 5 (Bruchrechnung)

Berechnen Sie (so weit wie möglich).

a) $\frac{7}{2} + \frac{13}{3} - \frac{1}{6}$

e) $\frac{2+a}{a^2b} + \frac{1-b}{ab^2} - \frac{2b}{a^2b^2}$

b) $\frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{6}$

f) $\frac{16x - 8y - 12z}{4xyz}$

c) $\frac{8}{\frac{3}{4}} \cdot \frac{\frac{8}{3}}{4}$

g) $\frac{\frac{1}{x} + \frac{1}{y}}{\frac{1}{xy}}$

d) $\left[\left(\frac{3}{7} : \frac{9}{14} \right) \cdot 3 \right] : \frac{1}{6}$

h) $\frac{3}{2b} - \frac{5}{3b}$

Aufgabe 6 (Wurzelrechnung)

Berechnen Sie so weit wie möglich:

a) $\sqrt[3]{27a^{12}} - \sqrt{4a^8}$

d) $\frac{\sqrt{4a^2 + 24ab + 36b^2}}{2(a^2 - 9b^2)}$

b) $\sqrt[3]{27x^{3p}y^{6q}z^{12r}}$

e)* $\frac{\sqrt[3]{a} \cdot a^{\frac{1}{12}} \cdot \sqrt[4]{a^3}}{\sqrt{a} \cdot a^{\frac{5}{12}}}$

c) $\sqrt[4]{x^8y^{12}z^{20}} \cdot \sqrt{x^{-2}y^{-4}z^{-6}}$

f)* $\sqrt[4]{\sqrt[3]{\sqrt{a}}}$

Aufgabe 7 (Ungleichungen)

Welche $x \in \mathbb{R}$ sind Lösungen folgender Ungleichungen?

a) $26 + 3(x - 5) > 7(x + 1)$

d) $(x - 1)^2(x + 4) > 0$

b) $3x - (x - 1) \geq x - (1 - x)$

e) $\frac{12 - 2x}{3x} < 2$

c) $x^2 \geq 9$

f) $\frac{4 - 2x}{3} \leq 7$

Aufgabe 8 (Absolutbeträge)

1. $|5 - 3x|$

- Berechnen Sie $|5 - 3x|$ für (i) $x = -1$, (ii) $x = 2$ und (iii) $x = 4$
- Lösen Sie die Gleichung $|5 - 3x| = 0$
- Formen Sie $|5 - 3x|$ um, indem Sie die Definition des Absolutbetrags benutzen.

2. Bestimmen Sie x , sodass

a) $|x| \leq 2$

b)* $|x^2 - 2| \leq 1$

Aufgabe 9 (Gleichungen)

Bestimmen Sie die Lösungen der folgenden Gleichungen.

a) $2x - (5 + x) = 16 - (3x + 9)$

b) $\frac{6x}{5} - \frac{5}{x} = \frac{2x - 3}{3} + \frac{8x}{15}$

c) $\frac{x - 3}{4} + 2 = 3$

d) $\frac{x + 2}{x + 4} = \frac{x - 1}{x + 5}$

e)* $\frac{x}{x - a} + \frac{x}{x - b} = 2$

Aufgabe 10 (Quadratische Gleichungen)

Bestimmen Sie die Lösungen der folgenden Gleichungen.

a) $3x^2 + 6x = 9$

c) $x^2 + 10x = -25$

b) $-2x^2 + 20 = -6x$

d) $-\frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{2}x + \frac{1}{2} = 0$

Aufgabe 11 (Gleichungssysteme)

Bestimmen Sie die Lösungen der folgenden Gleichungssysteme.

a) I : $x + 3y = 10$
II : $2x + 2y = 12$

d) I : $2x - 4y = 8$
II : $3x - 6y = 12$

b) I : $x - y = 5$
II : $x + y = 11$

e)* I : $4x - 3y = 1$
II : $2x + 9y = 4$

c) I : $2x - 4y = 8$
II : $3x - 6y = 15$

f)* I : $23p + 45q = 181$
II : $10p + 15q = 65$

Aufgabe 12 (Summen)

a) $\sum_{i=2}^5 (3i - 3)$

b) $\sum_{m=-1}^2 (2m + 1)$

c) Drücken Sie die folgenden Summe mit Hilfe des Summenzeichens aus.

(i) $1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3 + \dots + n^3$

(ii) $3x + 9x^2 + 27x^3 + 81x^4 + 243x^5$

d) Zeigen Sie, dass $\sum_{i=1}^n (a_i + b_i) = \sum_{i=1}^n a_i + \sum_{i=1}^n b_i$ (Additivität)

e) Zeigen Sie, dass $\sum_{i=1}^n (ca_i) = c \sum_{i=1}^n a_i$ (Homogenität)

f) $\sum_{i=1}^5 c$

g) $\sum_{i=3}^{10} 2$

h) Das arithmetische Mittel ist definiert als $\bar{x} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x_i$. Zeigen Sie, dass die Summe der Abweichungen vom arithmetischen Mittel Null ist.

$$\sum_{i=1}^N (x_i - \bar{x}) = 0$$