Brückenkurs Mathematik

Freie Universität Berlin
Professur für Ökonometrie

Wintersemester

Warum (wieder) Mathematik?

Mathematik ist unglaublich nützlich, z. B. für die

1. Formalisierung und Modellierung von Sachverhalten,
2. Optimierung und Entscheidungsfindung,
3. Quantifizierung und Messung,
4. Argumentation und logisches Denken,
5. Kommunikation und Zusammenarbeit,
6. und um das Studium erfolgreich zu meistern!

Warum Brückenkurs?

Die Teilnahme am Brückenkurs lohnt sich, wenn

- Mathelücken geschlossen werden sollen,
- die Schulzeit schon etwas länger her ist,
- Spaß an der Mathematik besteht

Im Brückenkurs werden nur Inhalte wiederholt, die aus der Schule **eigentlich** schon bekannt sein sollten!

Der neue Stoff kommt erst im Laufe des Semesters.

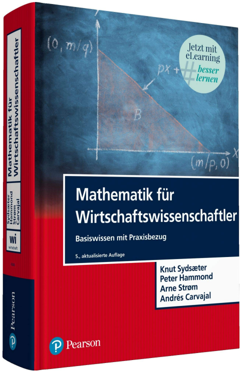
Brückenkurs - Aufbau

- Unbenoteter Test zur Selbsteinschätzung
- Wiederholung von Basiswissen in Mathematik
- Grundlage für Pflichtmodule in **BWL und VWL**
- Folien, Übungsaufgaben und Lösungen im Blackboardkurs von **Mathematik für Wiwiss**
- Anmeldung über Campus Management schaltet Blackboard (in der Regel) automatisch frei

Literatur

Kapitel 1-3 aus Sydsæter, K. et al. Mathematik für Wirtschaftswissenschaftler

- Verfügbar in der Bibliothek zur Ausleihe und zum vor Ort lesen
- Auf digitale Version hat leider immer nur eine Person Zugriff
- Lest die ersten Kapitel und löst die Übungsaufgaben
- Wird auch während des Semesters in Mathe verwendet



Inhalt

1. Einführung
    - Motivation
    - Organisatorisches
2. Algebra
    - Zahlen
    - Potenzen mit ganzem Exponenten
    - Regeln der Algebra
    - Brüche
3. Wurzeln
    - Quadratwurzel
    - n-te Wurzel
4. Ungleichungen
    - Notation
    - Rechenregeln
    - Vorzeichendiagramm
5. Absolutbetrag
    - Notation
    - Ungleichungen mit Absolutbeträgen
6. Gleichungen
    - Einfache Gleichungen
    - Quadratische Gleichungen
    - Lineare Gleichungssyteme
7. Summen
    - Notation
    - Summen in der Statistik

Zahlen

- Natürliche Zahlen $\mathbb{N}$
  $1, 2, 3, 4, \ldots$
- Ganze Zahlen $\mathbb{Z}$
  $0, \pm 1, \pm 2, \pm 3$
- Rationale Zahlen $\mathbb{Q}$
  $\frac{a}{b}$ mit $a, b \neq 0 \in \mathbb{Z}$,
  z. B. $\frac{1}{5}, -\frac{2}{3}$
- Reele Zahlen $\mathbb{R}$ z. B. $e, \pi, \sqrt{2}$

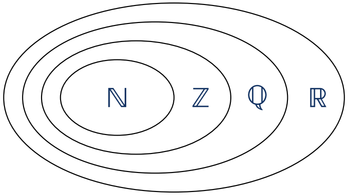


Abbildung Zusammenhang von $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ und $\mathbb{R}$

Potenzen mit ganzem Exponenten

$a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{n \text{ Faktoren}}$ mit Basis a und Exponent n

Eigenschaften von Potenzen

- $a^r \cdot a^s = a^{r+s}$
- $(a^r)^s = a^{rs}$
- $\frac{a^r}{a^s} = a^{r-s}$
- $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$
- $a^0 = 1$
- Im Allgemeinen: $(a+b)^r \neq a^r + b^r$

Beispiel: Zusammenfassen von Potenzen mit gleicher Basis

$3^8 \cdot 3^{-2} \cdot 3^{-3}$

Aufgabe 1

So weit wie möglich vereinfachen:

a) $3^{-1} \cdot 2^4 \cdot 3^3 \cdot 2^{-5}$

b) $8^{-2} \cdot 4^{-4} \cdot 8^3 \cdot 4^3$

c) $2^m \cdot 3^n \cdot 2^{-n} \cdot 3^{-m}$

d) $4^p \cdot 3^q \cdot 4^{-2p} \cdot 3^{2q}$

e) $a^4 \cdot b \cdot c^3 \cdot b^{-1} \cdot c^2 \cdot a^{-2}$

f) $s^3 \cdot t^{-2} \cdot u^4 \cdot t^3 \cdot s^{-4} \cdot u^{-2}$

g)* $\dfrac{a^5}{a^{-3}}$

h)* $(-1)^{2n} + (-1)^{2m+1}$, mit $n, m \in \mathbb{Z}$

Anwendung von Potenzen

Eine Größe K_0, die jedes Jahr um p% zunimmt (abnimmt), wird nach t Jahren auf

$$K(t) = K_0 \left(1 + \frac{p}{100}\right)^t \quad \text{bzw.} \quad K(t) = K_0 \left(1 - \frac{p}{100}\right)^t$$

anwachsen (fallen).

Beispiel:

Ein neues Auto wurde für € 15.000 gekauft. Es verliert jedes Jahr 15% an Wert. Wie groß ist der Wert nach 6 Jahren?

Aufgabe 2

a) Studierende bekommen auf ein Software-Paket für €199 beim Kauf 30% Ermäßigung. Was kostet das Software-Paket für Studierende?

b) Auf einem Sparkonto wird ein einmaliger Betrag von €500 am Anfang eines Kalenderjahres eingezahlt. Die Bank zahlt 4% Zinsen pro Jahr. Über welchen Betrag kann nach 5 Jahren verfügt werden?

c) Wie viel Geld hätten Sie vor 5 Jahren bei einem Zinssatz von 8% bei der Bank anlegen müssen, um heute €1.000 zu haben?

Regeln der Algebra

- $a + b = b + a$
- $(a + b) + c = a + (b + c)$
- $a + 0 = a$
- $a + (-a) = 0$
- $ab = ba$
- $(ab)c = a(bc)$
- $1 \cdot a = a$
- $aa^{-1} = 1$ für $a \neq 0$
- $(-a)b = a(-b) = -ab$
- $a(b + c) = ab + ac$
- $(a + b)c = ac + bc$

Regeln der Algebra

Beispiel: Ausdrücke vereinfachen

$$5a^2 - 3b - (-a^2 - 3b) - 3(a^2 + b) =$$

$$= 5a^2 - 3b + a^2 + 3b - 3a^2 - 3b$$

$$= 3a^2 - 3b = 3(a^2 - b)$$

Aufgabe 3

So weit wie möglich vereinfachen:

a) $3 \cdot 4 - 2 \cdot 6 - 3(4 - 5)$

b) $2 \cdot 5 - 3 \cdot 4 + 3(6 - 5)$

c) $(5a - 2b) - (-3a + 7b) - (6a - 8b)$

d) $cd - d(a - b) + (-a + c)(-d)$

e) $(2pq - 3p^2)(p + 2q) - (q^2 - 2pq)(2p - q)$

f) $[(8 - 6)3 + 4(8 + 3 \cdot 2 - 7) - 2] \div 16$

g)* $(4p - 3q) - (-8p - 4q) - (3p + 6q)$

h)* $[(4 - 2)5 + 3[(2 - 12 \cdot 3 + 40) - 3]] \div 19$

Binomische Formeln

1. $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$
2. $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$
3. $(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$

Beispiel 1: Ausmultiplizieren und Zusammenfassen

$(3x+2y)^2 = (3x+2y)\cdot(3x+2y)$

$= 3x\cdot 3x + 3x\cdot 2y + 2y\cdot 3x + 2y\cdot 2y = 9x^2 + 12xy + 4y^2$

Algebraische Ausdrücke

Ein Ausdruck mit Variablen x und y

$$3xy - 5x^2y^3 + 2xy + 6y^3x^2 - 3x + 5yx + 8$$

Einzelne Terme

$$3xy,\ 5x^2y^3,\ 2xy,\ 6y^3x^2,\ 3x,\ 5yx,\ 8$$

Terme vom selben Typ

$$3xy,\ 2xy,\ 5yx, \quad 5x^2y^3,\ 6y^3x^2, \quad 3x, \quad \text{und} \quad 8$$

Numerische Koeffizienten

$$3, -5, 2, 6, -3, 5, 8$$

Algebraische Ausdrücke zusammenfassen

$$3xy - 5x^2y^3 + 2xy + 6y^3x^2 - 3x + 5yx + 8$$

1. Terme vom selben Typ sammeln

   $3xy + 2xy + 5yx - 5x^2y^3 + 6y^3x^2 - 3x + 8$

2. Numerische Koeffizienten an den Anfang (Hier schon erledigt!)

3. Buchstaben der Terme in alphabetischer Reihenfolge

   $\underbrace{3xy + 2xy + 5xy}_{=10xy} \underbrace{-5x^2y^3 + 6x^2y^3}_{=x^2y^3} - 3x + 8$

4. Höhere Potenzen nach vorne

   $x^2y^3 + 10xy - 3x + 8$

5. Terme mit mehr Faktoren nach vorne (Hier schon erledigt!)

Zerlegen in Faktoren (Faktorisierung)

- Zum Vereinfachen von Ausdrücken, Kürzen von Brüchen und Lösen von Gleichungen
- Einen Ausdruck zu faktorisieren bedeutet, ihn als Produkt **einfacher** Faktoren zu schreiben:

  $49 = 7 \cdot 7$

  $5x^3y^3 - 15xy^2 = 5xy^2(x^2y - 3)$

Das geht z.B. durch Ausklammern gemeinsamer Faktoren (oben 7 und $5xy^2$).

Beispiel: Faktorisieren

$$-18b^2 + 9ab = 9ab - 18b^2 = 3 \cdot 3b(a - 2b)$$

$$16a^2 - 1 = (4a)^2 - 1^2 \cdot 1 = (4a + 1)(4a - 1)$$

Aufgabe 4

Klammern auflösen (a,b,d,e,g,h) bzw. Ausdrücke in Faktoren zerlegen (c,f,i):

a) $(1-x)^2$

b) $4(u+1)^2$

c) $a^2-4ab+4b^2$

d) $(3u-5v)^2$

e) $(x+2)(x-2)$

f) $9x^2-49$

g) $(2a+3b)(2a-3b)$

h)* $(3x+4y)^2$

i)* $4z^2-25w^2$

Brüche

$$a \div b = \frac{a}{b} \qquad \begin{array}{l} \leftarrow \text{Zähler} \\ \leftarrow \text{Nenner} \end{array}$$

Eigenschaften von Brüchen

- $\frac{a \cdot c}{b \cdot c} = \frac{a}{b}$
- $\frac{-a}{-b} = \frac{-a \cdot (-1)}{-b \cdot (-1)} = \frac{a}{b}$
- $-\frac{a}{b} = \frac{(-1) \cdot a}{b} = \frac{-a}{b}$
- $\frac{a}{c} + \frac{b}{c} = \frac{a+b}{c}$
- $\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{a \cdot d}{b \cdot d} + \frac{b \cdot c}{b \cdot d} = \frac{ad+bc}{bd}$
- $a + \frac{b}{c} = \frac{ac}{c} + \frac{b}{c} = \frac{ac+b}{c}$
- $a \cdot \frac{b}{c} = \frac{ab}{c}$
- $\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{a \cdot c}{b \cdot d}$
- $\frac{a}{b} \div \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c} = \frac{a \cdot d}{b \cdot c}$

Brüche berechnen

Beispiel 1: Addition und Subtraktion

$$\frac{3}{5} + \frac{2}{15} - \frac{1}{3} =$$

Beispiel 2: Multiplikation und Division

$$\left(\frac{3}{5} \div \frac{2}{15}\right) \cdot \frac{1}{9} =$$

Beispiel 3: Doppelbruch

$$\frac{2}{\frac{3}{4}} \cdot \frac{\frac{8}{3}}{4} =$$

Kürzen von Brüchen

Vereinfache soweit wie möglich

$$\frac{5x^2yz}{25xy^2z^3} =$$

$$\frac{x^2 + xy}{x^2 - y^2} =$$

$$\frac{4 - 4a + a^2}{a^2 - 4} =$$

Aufgabe 5

So weit wie möglich berechnen:

a) $\dfrac{7}{2}+\dfrac{13}{3}-\dfrac{1}{6}$

b) $\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{6}$

c) $\dfrac{8}{\frac{3}{4}}\cdot\dfrac{\frac{8}{3}}{4}$

d) $\left[\left(\dfrac{3}{7}:\dfrac{9}{14}\right)\cdot 3\right]:\dfrac{1}{6}$

e) $\dfrac{2+a}{a^2b}+\dfrac{1-b}{ab^2}-\dfrac{2b}{a^2b^2}$

f) $\dfrac{16x-8y-12z}{4xyz}$

g) $\dfrac{\frac{1}{x}+\frac{1}{y}}{\frac{1}{xy}}$

h) $\dfrac{3}{2b}-\dfrac{5}{3b}$

Potenzen mit gebrochenem Exponenten

Wie definieren wir a^x für eine rationale Zahl x?

Beispiel: Produktionsfunktion $Y = K^{\frac{1}{4}} L^{\frac{3}{4}}$

Die Quadratwurzel

Wir definieren $a^{\frac{1}{2}} = \sqrt[2]{a} = \sqrt{a}$ für $a > 0$. Das heißt, dass die Quadratwurzel mit sich selbst multipliziert a ergibt.

Hinweis: Die Quadratwurzel ist nicht-negativ!

Die Quadratwurzel

Wir wissen, dass $(-2)^2 = 4 \quad \text{und} \quad 2^2 = 4$.

Das heißt, $x^2 = 4$ hat zwei Lösungen: $x_1 = -2$ oder $x_2 = 2$.

Wir schreiben auch $x = \pm\sqrt{4} = \pm 2$

Jedoch ist $\sqrt{4} = 2$ und **nicht** -2.

n-te Wurzel

Definition:

$$a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a}, \qquad n \in \mathbb{N}$$

$$a^{p/q} = \left(\sqrt[q]{a}\right)^p = \sqrt[q]{a^p} \quad p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{N}$$

- $\sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}$
- $\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$

Beispiel 1

$\sqrt{1600} =$

Beispiel 2

$\frac{\left(\sqrt[8]{a}\right)^3}{\left(\sqrt[8]{a}\right)} =$

Aufgabe 6

So weit wie möglich berechnen:

a) $\sqrt[3]{27a^{12}} - \sqrt{4a^8}$

b) $\sqrt[3]{27x^{3p}y^{6q}z^{12r}}$

c) $\sqrt[4]{x^8y^{12}z^{20}} \cdot \sqrt{x^{-2}y^{-4}z^{-6}}$

d) $\dfrac{\sqrt{4a^2 + 24ab + 36b^2}}{2(a^2 - 9b^2)}$

e)* $\dfrac{\sqrt[3]{a} \cdot a^{\frac{1}{12}} \cdot \sqrt[4]{a^3}}{\sqrt{a} \cdot a^{\frac{5}{12}}}$

f)* $\sqrt[4]{\sqrt[3]{\sqrt{a}}}$

Ungleichungen

Reelle Zahlen bestehen aus

- Positiven Zahlen: $a > 0$ d.h. a ist größer als 0,
- Null 0,
- Negativen Zahlen: $b < 0$ d.h. b ist kleiner als 0.

Definition

Die Zahl a ist strikt größer als b, wenn $a - b$ positiv ist. Wir schreiben:

$$a > b \quad \text{oder} \quad b < a$$

Strikte und schwache Ungleichungen:

- Wenn $a > b$, dann ist a strikt größer als b.
- Wenn $a > b$ oder $a = b$, dann ist a größer oder gleich b, d.h. $a \geq b$

Rechenregeln für Ungleichungen

Für positive Zahlen gilt

1) $a > 0$ und $b > 0 \quad \Rightarrow \quad a + b > 0$ und $a \cdot b > 0$

Im Allgemeinen gilt

2) $a > b \quad \Rightarrow \quad a + c > b + c \quad \forall\, c$ (für alle c)
3) $a > b$ und $c > 0 \quad \Rightarrow \quad ac > bc$
4) $a > b$ und $c < 0 \quad \Rightarrow \quad ac < bc$
5) $a > b$ und $b > c \quad \Rightarrow \quad a > c$
6) $a > b$ und $c > d \quad \Rightarrow \quad a + c > b + d$

Das selbe gilt für “$\geq$” statt “$>$”.

Multiplikation von Ungleichungen

- Werden beide Seiten einer Ungleichung mit einer positiven Zahl multipliziert, bleibt die Richtung der Ungleichung erhalten.
- Werden beide Seiten einer Ungleichung mit einer negativen Zahl multipliziert, kehrt sich die Richtung der Ungleichung um.
  (Dies gilt allgemein für nicht monotone Transformationen)
- Werden beide Seiten einer Ungleichung mit einer unbekannten Variable x multipliziert, muss eine Fallunterscheidung für $x > 0$ und $x < 0$ vorgenommen werden.

Beispielaufgaben: Ungleichungen I

Für welche Werte von x sind die Ungleichungen erfüllt?

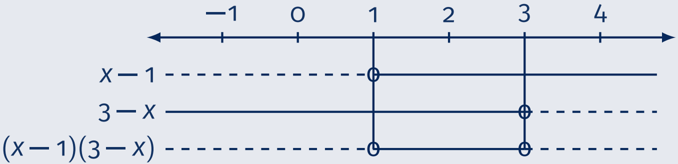
Beispiel 1: Einfache Ungleichung

$3x - 5 > x - 3 \iff 3x > x + 2 \iff 2x > 2 \iff x > 1$

Beispiel 2: Vorzeichendiagramm

$$(x-1)(3-x) > 0$$

Bestimmen der Vorzeichen der einzelnen Faktoren:



Beispielaufgaben: Ungleichungen II

Beispiel 3: Vorzeichendiagramm

$$\frac{2p-3}{p-1} > 3-p$$

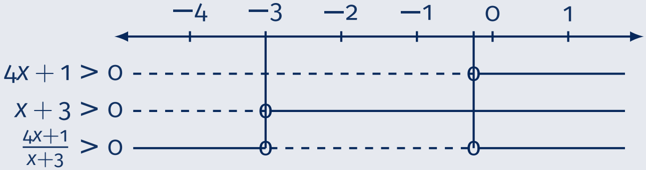
Beispielaufgaben: Ungleichungen III

Beispiel 4: Vorzeichendiagramm

$$\frac{(x-2)+3(x+1)}{x+3} \leq 0$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{4x+1}{x+3} \leq 0$$

$$4x+1>0 \quad \Rightarrow \quad x > -\frac{1}{4} \quad \text{und} \quad x+3>0 \quad \Rightarrow \quad x>-3$$



Lösung: $-3 > x \geq -\frac{1}{4}$

Aufgabe 7

Welche $x \in \mathbb{R}$ sind Lösungen folgender Ungleichungen?

a) $26 + 3(x - 5) > 7(x + 1)$

b) $3x - (x - 1) \geq x - (1 - x)$

c) $x^2 \geq 9$

d) $(x - 1)^2(x + 4) > 0$

e) $\dfrac{12 - 2x}{3x} < 2$

f) $\dfrac{4 - 2x}{3} \leq 7$

Intervalle und Ungleichungen

Name	Notation	Enthält x mit:
Offenes Intervall	(a, b)	$a < x < b$
Geschlossenes Intervall	$[a, b]$	$a \leq x \leq b$
Halboffenes Intervall	$(a, b]$	$a < x \leq b$
	$[a, b)$	$a \leq x < b$

- Die Länge aller Intervalle ist $b - a$

Absolutbeträge

Der Abstand zwischen $a \in \mathbb{R}$ und 0 heißt Absolutbetrag:

$$|a| = \begin{cases} a & \text{für } a \geq 0 \\ -a & \text{für } a < 0 \end{cases}$$

- $|a| \;=\; |-a| \;=\; a$
- Wenn $a = 2$, dann $|2| = 2$
- Wenn $a = -5$, dann $|-5| = -(-5) = 5$

Beispiel 1: Abstand zwischen (-5) und 2

$|(-5) - 2| =$

Ungleichungen mit Absolutbeträgen

- $|x| < a$ bedeutet $-a < x < a$
- $|x| \leq a$ bedeutet $-a \leq x \leq a$
- $|x| > a$ bedeutet $x < -a$ oder $a < x$

Beispiel 2: Bestimmen Sie x, sodass:

$|3x - 2| \leq 5$

$9 - x^2 < 0$

Aufgabe 8

1. $|5-3x|$

   a) Berechne $|5-3x|$ für (i) $x=-1$, (ii) $x=2$ und (iii) $x=4$.

   b) Löse die Gleichung $|5-3x|=0$

   c) Forme $|5-3x|$ um, indem du die Definition des Absolutbetrags benutzt.

2. Bestimme x, sodass

   a) $|x| \leq 2$

   b)* $|x^2-2| \leq 1$

Einfache Gleichungen

Drei Beispiele für einfache Gleichungen

a) Mit Variable x:

$$3x + 10 = x + 4$$

b) Mit variable z:

$$\frac{z}{z-5} + \frac{1}{3} = \frac{-5}{5-z}$$

c) Mit drei Variablen Y, C und I:

$$Y = C + I$$

Lösen einer Gleichung

Alle Werte der Variablen finden, für die die Gleichung erfüllt ist.

Lösen von Gleichung a)

Lösen durch Umformungen auf **beiden Seiten** der Gleichung.

$$\begin{aligned} && 3x + 10 &= x + 4 && \mid -x \\ \Leftrightarrow && 2x + 10 &= 4 && \mid -10 \\ \Leftrightarrow && 2x &= -6 && \mid \div 2 \\ \Leftrightarrow && x &= -3 && \end{aligned}$$

Gleichung a) hat eine eindeutige Lösung bei $x = -3$. Die Lösungsmenge ist $L = \{-3\}$.

Beispiele: Gleichungen

Lösen von Gleichung b)

$$\frac{z}{z-5}+\frac{1}{3}=\frac{-5}{5-z}$$

Beispiele: Gleichungen

Für welche Werte von x ist die Gleichung erfüllt?

$$\frac{x+2}{x-2} - \frac{8}{(x-2)x} = \frac{2}{x}$$

Aufgabe 9

Bestimme die Lösungen der folgenden Gleichungen:

a) $2x - (5 + x) = 16 - (3x + 9)$

b) $\dfrac{6x}{5} - \dfrac{5}{x} = \dfrac{2x-3}{3} + \dfrac{8x}{15}$

c) $\dfrac{x-3}{4} + 2 = 3$

d) $\dfrac{x+2}{x+4} = \dfrac{x-1}{x+5}$

e)* $\dfrac{x}{x-a} + \dfrac{x}{x-b} = 2$

Quadratische Gleichungen

Allgemeinform: $ax^2 + bx + c = 0,$ wobei $a \neq 0$

Normalform: $x^2 + px + q = 0$ mit $p = b/a$ und $q = c/a$

Spezialfälle:

1) $p = 0$, d.h. $x^2 + q = 0 \iff x^2 = -q$
   für $q > 0$: keine reelle Lösung
   für $q < 0$: $x_{1,2} = \pm\sqrt{-q}$

2) $q = 0$, d.h. $x^2 + px = 0 \iff x(x+p) = 0$
   $\iff x_1 = 0$ und $x_2 = -p$

Beispiel: Spezialfall 2)

$x^2 - 4x = 0$

Lösen von quadratischen Gleichungen

Beispiel: Quadratische Ergänzung

$x^2 + 8x - 9 = 0$

Formeln:

- p-q-Formel: Funktion in Normalform ($x^2 + px + q = 0$)

  $$x_{1,2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\frac{p^2}{4} - q} \text{ für } \frac{p^2}{4} \geq q$$

- Mitternachtsformel: Allgemeinform ($ax^2 + bx + c = 0$)

  $$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \text{ für } b^2 - 4ac \geq 0 \text{ und } a \neq 0$$

Aufgabe 10

Bestimme die Lösungen der folgenden Gleichungen:

a) $3x^2 + 6x = 9$

b) $-2x^2 + 20 = -6x$

c) $x^2 + 10x = -25$

d) $-\frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{2}x + \frac{1}{2} = 0$

Gleichungssysteme mit zwei Unbekannten

$$
\begin{aligned}
&(\mathrm{I}) && 2x + 3y = 18 \\
&(\mathrm{II}) && 3x - 4y = -7
\end{aligned}
$$

- Ein lineares Gleichungssystem ist eindeutig lösbar, wenn es genau so viele Gleichungen wie Unbekannte besitzt.
- Lösbar durch
  - Einsetzen der Gleichungen ineinander
  - Gleichsetzen der Gleichungen
  - Umformungen einzelner Gleichungen
  - Addieren von Gleichungen (beide Seiten!)
  - Oder: Gauß'sches Eliminationsverfahren (Mathekurs)

Lösen eines linearen Gleichungssystems

Beispiel

$$
\begin{aligned}
&(\mathrm{I}) \quad && 2x + 3y = 18 \\
&(\mathrm{II}) \quad && 3x - 4y = -7
\end{aligned}
$$

Aufgabe 11

Bestimme die Lösungen der folgenden Gleichungssysteme:

a) $I: x + 3y = 10$
$II: 2x + 2y = 12$

b) $I: x - y = 5$
$II: x + y = 11$

c) $I: 2x - 4y = 8$
$II: 3x - 6y = 15$

d) $I: 2x - 4y = 8$
$II: 3x - 6y = 12$

e)* $I: 4x - 3y = 1$
$II: 2x + 9y = 4$

f)* $I: 23p + 45q = 181$
$II: 10p + 15q = 65$

Summennotation I

$$N_1 + N_2 + N_3 + N_4 + N_5 + N_6 = \sum_{i=1}^{6} N_i$$

- Summenzeichen: $\sum$
- Summationsgrenzen: 1 und 6
- Summationsindex: i

Beispiel:

$$\sum_{i=1}^{5} i^2 =$$

Summennotation II

Allgemeine Grenzen: p, q sind ganze Zahlen und $q \geq p$

$$\sum_{i=p}^{q} a_i = a_p + a_{p+1} + \ldots + a_q$$

Anzahl der Summanden: $q - p + 1$

Beispiel: Summe einer Konstanten

$$\sum_{i=2}^{5} 3 =$$

Summen in der Statistik

Das arithmetische Mittel (Mittelwert) $\bar{x}$ von n Zahlen $x_1, x_2, \ldots, x_N$ ist definiert als

$$\bar{x} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} x_i$$

Beispiel: Summe der Abweichungen vom Mittelwert

Zeige, dass $\sum_{i=1}^{N} (x_i - \bar{x}) = 0$.

Aufgabe 12

1. $\sum_{i=2}^{5}(3i-3)$

2. $\sum_{m=-1}^{2}(2m+1)$

3. Drücke die folgenden Summe mit Hilfe des Summenzeichens aus:

   (i) $1^3+2^3+3^3+4^3+\cdots+n^3$

   (ii) $3x+9x^2+27x^3+81x^4+243x^5$

4. Zeige, dass $\displaystyle\sum_{i=1}^{n}(a_i+b_i)=\sum_{i=1}^{n}a_i+\sum_{i=1}^{n}b_i$

5. Zeige, dass $\displaystyle\sum_{i=1}^{n}(ca_i)=c\sum_{i=1}^{n}a_i$

6. $\sum_{i=1}^{5}c$

7. $\sum_{i=3}^{10}2$

8. Das arithmetische Mittel ist definiert als $\bar{x}=\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}x_i$. Zeige, dass die Summe der Abweichungen vom arithmetischen Mittel Null ist:

$$\sum_{i=1}^{N}(x_i-\bar{x})=0$$